

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 2

Serie nona

1 Febbraio 1951

Emission of Neutrons and Protons from Ne^{22} by the Bombardament of α -Particles.

Z. M. I. OLLANO (*) and R. R. ROY

Centre de Physique Nucléaire — Université Libre de Bruxelles

(ricevuto il 26 Ottobre 1950)

Summary. — The reactions ${}_{10}\text{Ne}^{22}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{25}$ and ${}_{10}\text{Ne}^{22}(\alpha, p){}_{11}\text{Na}^{25}$ were investigated by photographic technique method. Two groups of neutrons were observed corresponding to Q values -0.916 ± 0.07 MeV and -1.71 ± 0.08 MeV for $E_\alpha = 4.4$ MeV. A study of the reaction $\text{Ne}^{22}(\alpha, p)\text{Na}^{25}$ was made by the detection of β -particles according to the process $\text{Na}^{25} \xrightarrow{\beta^-} \text{Mg}^{25}$, the incident energy of the α -particles being 4.8 MeV.

1. — Introduction.

For most of the normal isotopes of light elements, investigations of the (α, n) and (α, p) reactions have already been made generally using α -particles from natural radioactive sources, and accurate information has been obtained regarding the resonance levels and Q -values involved. When, however, such studies are extended to the rarer isotopes, the effect sought for is liable to be submerged by the main isotope, owing to the small percentage present. This difficulty can be overcome, to a certain extent, by applying photographic emulsion technique which permits accumulation of results over a long period of exposure. We have applied this technique to detect the emission of neutrons and protons from Ne^{22} by bombardment with α -particles.

(*) On leave of absence from the University of Pavia, Italy.

2. - Experimental details.

Fig. 1 (a), (b) and (c) illustrate the general arrangement of the apparatus. The source S , which consisted of α -particles from polonium, was deposited at the end of a wire W and introduced through a hole in the lead cylinder C_1 . Its position could be varied, enabling α -particles of different energies to enter the chamber. These were canalised so as to emerge into the target chamber T

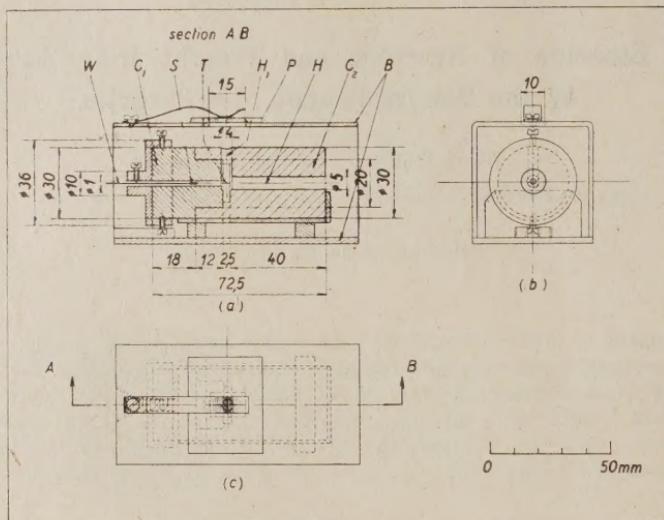


Fig. 1.

in the form of a parallel beam. The cylinder C_1 prevented any γ -ray from striking directly on to the photographic plate P . As it was intended to give long exposures, the part of the beam that remained after it had traversed the disintegration chamber was allowed to pass through a hole H of a second lead cylinder C_2 . This was in order to prevent unnecessary blackening of the plate by excitation radiation from the target gas, due to the bombardment with α -particles. A channel H_1 was drilled in C_2 leading to the photographic plate thus allowing disintegration particles emitted at right angle to the incident beam to be registered. A rectangular framework of brass B served as a support to the cylinders as well as a base for the plate. Ilford C2, 50 μ plates were used for the (α, n) -reaction and G5, 200 μ plates for the (α, p) -reaction. The whole unit was housed in an air-tight container which was evacuated before spectroscopically pure neon was introduced. An exposure of 5 days was given for each plate for the (α, n) -reaction and of two days for

the (α, p) -reaction. The energy of neutrons was determined from the measurement of recoil protons produced in the emulsion.

3. — Results and discussion.

A) (α, n) -Reaction.

The neon used in the present experiments consisted of three isotopes Ne^{20} (90%), Ne^{21} (0.27%) and Ne^{22} (9.73%). The emission of neutrons from the reaction $\text{Ne}^{20}(\alpha, n)\text{Na}^{23}$ can be altogether ruled out, since, as can be seen from Table I the Q -value is highly negative and the threshold energy for this process

TABLE I.

Isotope	Reaction	Q -values from mass data
Ne^{20}	${}_{10}\text{Ne}^{20}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{23}$	— 6.27 MeV
Ne^{21}	${}_{10}\text{Ne}^{21}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{24}$	3.05 MeV
Ne^{22}	${}_{10}\text{Ne}^{22}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{25}$	— 1.05 MeV

is about 6.3 MeV. On the other hand, as the reaction $\text{Ne}^{21}(\alpha, n)\text{Mg}^{24}$ is exothermic, for $E_\alpha = 4.4$ MeV and $Q = 3.05$ MeV, the energy of a neutron emitted

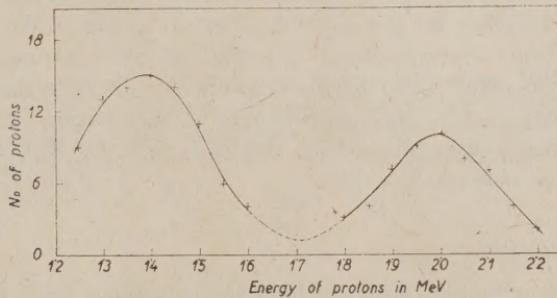


Fig. 2.

at 90° to the incident beam would be 6.44 MeV. Such a neutron would produce a recoil proton of energy 4.83 MeV at an angle of 30° with respect to its incident direction. The fact that no such high energy recoil proton was noted leads to the conclusion that the protons observed were not due to the reaction $\text{Ne}^{21}(\alpha, n)\text{Mg}^{24}$.

Fig. 2 gives the distribution of energy of the recoil protons ejected at angles

between 25° and 35° , the energy of the incident α -particles being 4.4 MeV. There are two groups of protons as shown in the figure with their maxima at 1.4 MeV and 2.0 MeV.

If r be the length of the recoil tracks as measured from the ocular scale and y be the dip, the angle θ between the direction of the incident neutron and the recoil proton is $\cos^{-1} y/r$. Knowing this angle θ and the energy of the recoil proton, the energy of the neutron emitted can be determined from the relation $E_p = E_n \cos^2 \theta$. The energies of the two groups of neutrons emitted from the reaction at right angles to the direction of the incident beam, as derived from the above relation, are 2.67 MeV and 1.91 MeV. The Q -values for the two groups — 0.916 ± 0.07 MeV and -1.71 ± 0.08 MeV are given in Table II.

TABLE II.

Reaction	Energy of incident α -particles	Total n. of protons measured for each group	Energy of neutrons at $\theta = 90^\circ$	Q -values in MeV experimental
${}_{10}\text{Ne}^{22}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{25}$	4.4 MeV	a) 236	2.67 MeV	-0.916 ± 0.07
		b) 375	1.91 MeV	-1.71 ± 0.08

The value -0.916 ± 0.07 MeV agrees closely with that derived from the mass data — 1.047 MeV for the reaction ${}_{10}\text{Ne}^{22}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{25}$. We may conclude then that neutrons corresponding to -0.916 MeV are emitted from the compound nucleus ${}_{12}\text{Mg}^{26*}$, leaving the final nucleus ${}_{12}\text{Mg}^{25}$ in the ground state. The second group -1.71 MeV corresponds to the excited state transition. The energy of the γ -ray emitted from this state is 0.794 MeV which is given by the difference between Q -values.

B) (α, p) -Reaction.

The emission of protons from all three of the isotopes Ne^{20} , Ne^{21} and Ne^{22} is energetically possible. The Q -values, however, as derived from mass data — 2.49 MeV, — 1.96 MeV and — 2.13 MeV respectively are too close to determine which protons relate to a particular reaction, especially, if a resonance level exists in all the reactions for the same incident energy of α -particles. Emission from $\text{Ne}^{20}(\alpha, p)\text{Na}^{23}$ arising from the ground state transition was demonstrated by cloud chamber method by CHAMPION and ROY⁽¹⁾ and the

(1) F. C. CHAMPION and R. R. ROY: *Phys. Rev.*, **74**, 5 (1948).

final nucleus that resulted was the normal stable isotope of sodium. From the reactions $\text{Ne}^{21}(\alpha, p)\text{Na}^{24}$ and $\text{Ne}^{22}(\alpha, p)\text{Na}^{25}$, the nuclei Na^{24} and Na^{25} will be unstable and characterised by the emission of β -particles. The energy spectrum of β -particles from Na^{24} is well known and the upper limit of energy as determined by SIEGBAHN (2) is at 1.39 MeV. By investigating the β -particles according to the transition ${}_{11}\text{Na}^{25} \xrightarrow{\beta^-} {}_{12}\text{Mg}^{25}$, we have endeavoured to establish the reaction $\text{Ne}^{22}(\alpha, p)\text{Na}^{25}$, with incident α -particles of energy 4.8 MeV.

The excess of β -particles on the exposed plate which, examination revealed, had 100% more than the test plate, indicated that the particles recorded arose from the disintegration process. From a study of the energies of the β -particles, which were measured by the amount of scattering they suffered inside the emulsion, it appeared that their maximum energy was about 3.4 MeV (3). In view of the fact that the upper energy limit of β -particles from Na^{24} is 1.39 MeV, the β -particles which we observed must be from Na^{25} due to the reaction $\text{Ne}^{22}(\alpha, p)\text{Na}^{25}$.

Precise determination of the upper energy limit was not possible owing to the small number of β -particles obtained in this region and the back ground due to cosmic rays.

Acknowledgement.

The authors would like to express their thanks to Professor MAX COSYNS for discussions during the progress of the experiment. One of us (Z.M.I.O.) is indebted to Professor MAX COSYNS for the generous hospitality which he has accorded her during the course of this work.

(2) KAI SIEGBAHN: *Phys. Rev.*, **70**, 127 (1946).

(3) While this paper was in the process of being written, it came to the notice of the authors that HUBER, LIENHARD, SCHERRER and WÄFFLER (*Helv. Phys. Acta*, **17**, 139 (1944)) obtained an upper energy limit of 3.4 MeV for β -rays from Na^{25} due to the reaction $\text{Mg}^{22}(\gamma, p)\text{Na}^{25}$ and the value quoted by BLEULER and ZÜNTI (*Helv. Phys. Acta*, **19**, 421 (1946)) is 3.7 MeV.

RIASSUNTO (*)

Si sono studiate le reazioni ${}_{10}\text{Ne}^{22}(\alpha, n){}_{12}\text{Mg}^{25}$ e ${}_{10}\text{N}^{22}(\alpha, p){}_{11}\text{Na}^{25}$ col metodo fotografico. Si sono osservati due gruppi di neutroni corrispondenti a valori di $Q = -0,916 \pm 0,07$ MeV e $Q = -1,71 \pm 0,08$ MeV per $E_\alpha = 4,4$ MeV. È stata studiata la reazione $\text{Ne}^{22}(\alpha, p)\text{Na}^{25}$ per mezzo della rivelazione di particelle β derivanti dal processo $\text{Na}^{25} \rightarrow \text{Mg}^{25}$ per una energia delle particelle α incidenti di 4,8 MeV.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Disintegrazioni nucleari a grande altezza.

M. M. ADDARIO e S. TAMBURINO

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 14 Novembre 1950)

Riassunto. — Su lastre Ilford C₂ vengono studiate le stelle prodotte dalla radiazione cosmica a 29 000 m s.l.d.m. Si discute sulla radiazione che ha generato le stelle a 29 000 m e si conclude che tale radiazione è per la massima parte costituita da nucleoni primari. È data la distribuzione dell'energia delle particelle α emesse dalle stelle; sono calcolati i valori del rapporto del numero delle particelle α rispetto al numero totale delle particelle emesse. Da questi dati e dal confronto di essi con quelli ottenuti da altri autori ad altezze montane, si deduce che in una disintegrazione nucleare la distribuzione delle particelle di vario numero atomico Z emesse durante l'evaporazione non dipende né dall'energia d'eccitazione, né dall'energia della radiazione che genera le stelle. Nelle lastre esaminate viene osservata una anomalia nella distribuzione delle stelle; dal confronto colle osservazioni di altri autori ad altezze montane sembra che tale fenomeno non varii coll'altezza.

1. — Introduzione.

In questa nota vengono paragonate le caratteristiche delle disintegrazioni nucleari osservate su lastre Ilford C₂, esposte ai raggi cosmici fino a 29 000 m s.l.d.m., con le caratteristiche delle disintegrazioni nucleari osservate su lastre dello stesso tipo, esposte a quote più basse da altri ricercatori (HARDING LATTIMORE e PERKINS a 3 457 \div 4 400 m⁽¹⁾; BERNARDINI, CORTINI e MANFREDINI a 3 500 m⁽²⁾; N. PAGE a 3 450 m⁽³⁾; HARDING⁽⁴⁾). Da questo confronto

(¹) J. B. HARDING, S. LATTIMORE e D. H. PERKINS: *Proc. Roy. Soc.*, A, **196**, 325 (1950).

(²) G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **76**, 1792 (1949).

(³) N. PAGE: *Proc. Phys. Soc. A* **63**, 250 (1950).

(⁴) J. B. HARDING: *Phil. Mag.*, **40**, 530 (1949).

si traggono informazioni sulla radiazione che genera le stelle e sul meccanismo col quale avvengono le disintegrazioni nucleari.

Osservando le stelle generate a grande altezza dalla radiazione cosmica mediante lastre sensibili agli elettroni, è stato trovato che molte stelle emettono particelle relativistiche. Siccome le lastre Ilford C₂ da noi usate non sono sensibili alle particelle relativistiche, il nostro studio è necessariamente limitato a quelle particelle che in una disintegrazione nucleare vengono emesse con una energia il cui valore massimo è di 5 MeV per i mesoni, di 50 MeV per i protoni e di 400 MeV per le particelle α .

2. - Esposizione delle lastre alla radiazione cosmica e loro osservazione al microscopio.

Le lastre per ricerche nucleari, che abbiamo avuto grazie alla cortesia del prof. OPPENHEIMER, sono Ilford C₂ non cariche, spesse 100 μ e con una superficie di $2,5 \times 7,5$ cm². Tali lastre sono state portate, mediante pallone sonda, fino a 29 000 m s.l.d.m. a 55° N di latitudine geomagnetica (Camp Ripley, Minnesota). Il tempo impiegato dal pallone per percorrere lo spazio fra il livello del suolo e 27 500 m è stato di 2^h e 15^{min}, mentre il tempo di permanenza fra 27 500 m e 29 000 m è stato di 5^h e 20^{min}. Durante il volo le lastre erano disposte verticalmente l'una accanto all'altra, entro una sfera di alluminio dello spessore di 1 mm e del diametro di 76 cm. Vicino alle lastre stavano da un lato 3 condensatori elettrolitici e dall'altro una camera di Wilson che occupava una piccola parte dell'angolo solido attorno al e lastre. Solo le particelle che incidevano con un angolo zenitale maggiore di 52° potevano attraversare la camera di Wilson.

L'esplorazione al microscopio è stata fatta con un ingrandimento di 190 \times . Abbiamo scartato, come stelle di contaminazione radioattiva, le stelle aventi tutti i rami con una proiezione sul piano della lastra $\leq 66 \mu$ ($= 11,6$ cm in aria⁽⁵⁾). Abbiamo pure scartate le stelle con meno di 3 rami, e per quelle a 3 rami abbiamo cercato di escludere i casi di urto protone-protone.

Successivamente le stelle sono state osservate a immersione con un ingrandimento di 1150 \times . Durante l'osservazione ad immersione abbiamo fatto il disegno di ciascuna stella, abbiamo misurato la profondità di tutte le tracce delle stelle e la lunghezza della loro proiezione nel piano della lastra, abbiamo inoltre segnato quali di tali tracce finivano nell'emulsione, quali nell'aria e quali nel vetro. Con tali dati, e tenendo conto della contrazione subita dalla gelatina durante lo sviluppo, abbiamo ottenuto la lunghezza effettiva di ogni traccia.

⁽⁵⁾ C. F. POWELL e G. P. S. OCCHIALINI: *Nuclear Physics in Photographs*, pag. 29.

Abbiamo poi costruito le curve densità dei granuli versus il range per i protoni, le particelle α e i mesoni valendoci di tracce di protoni, mesoni e particelle α che finivano nell'emulsione. Abbiamo ritenuto necessario costruire queste curve invece di usare quelle date da altri autori perchè nelle nostre lastre, esposte per un tempo molto breve e sviluppate subito dopo l'esposizione, il fading non ha avuto tempo di agire e quindi le tracce delle particelle potevano presentare una densità di granuli notevolmente elevata. Mediante tali curve e usando sempre il metodo del conto dei granuli, abbiamo identificato le particelle emesse dalle stelle osservate. Ricordiamo che il metodo usato per identificare la particella che ha prodotto una traccia dà dei risultati esatti solo quando la traccia finisce nell'emulsione; quando la traccia non finisce nell'emulsione può per esempio succedere che una particella α energica venga confusa con un protone di minore energia. Mediante il conto dei granuli abbiamo trovato che alcuni dei rami delle stelle devono essere stati generati da tritoni, alcuni da mesoni ed altri, più densi di una particella α in fine range, da frammenti nucleari con massa e carica maggiori di quelle di una particella α .

Nello stabilire il numero dei rami delle singole stelle non abbiamo considerato come ramo la traccia prodotta dal residuo nucleare.

3. - Calcolo della percentuale di stelle generata dai raggi cosmici primari su lastre esposte a 29 000 m s.l.d.m.

BERNARDINI, CORTINI e MANFREDINI (2) hanno trovato che solamente un decimo delle stelle osservate su lastre esposte a 3500 m è generato da nucleoni primari. Per sapere se le stelle da noi osservate su lastre esposte fino a 29 000 m si possono considerare generate da nucleoni primari, ripetiamo il calcolo di BERNARDINI e coll. La sezione d'urto con la quale i nucleoni primari sono capaci di produrre stelle a 29 000 m ($= 14 \text{ g cm}^{-2}$) è data (2) dalla relazione:

$$(a) \quad \sigma = N/IM,$$

dove $N = (2,26 \pm 0,14) \cdot 10^{-2}$ è il numero di stelle con 3 o più rami per cm^3 di emulsione e per secondo osservate a 14 g cm^{-2} dal limite dell'atmosfera; $M = 4,72 \cdot 10^{22}$ è il numero di atomi per cm^3 di emulsione Ilford C₂ non carica (In tale valore non sono stati compresi gli atomi di H dell'emulsione, perchè dall'urto di un nucleone con un atomo di H della gelatina non può avere origine una stella con 3 o più rami, come quelle da noi prese in considerazione). I è l'intensità dei raggi cosmici primari a 14 g cm^{-2} di atmosfera residua. Se usiamo la trasformazione di Gross, tale intensità sarà data dalla relazione:

$$I = 2\pi I_0 \left[\exp\left(-\frac{h}{\lambda}\right) + \frac{h}{\lambda} E_i\left(-\frac{h}{\lambda}\right) \right],$$

dove I_0 , intensità della radiazione cosmica primaria al limite dell'atmosfera, è uguale a $0,12 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$ (6); h , spessore di atmosfera lungo il quale l'intensità I_0 si riduce a I , è uguale a 14 g cm^{-2} ; λ , libero cammino medio d'interazione in aria ~~corrispondente~~ alla sezione geometrica, è uguale a 65 g cm^{-2} .

Invece del libero cammino medio d'assorbimento della radiazione che genera le stelle, nel calcolo di I abbiamo usato il libero cammino medio di interazione della radiazione cosmica primaria, perchè la radiazione che genera stelle nell'atmosfera non è costituita da soli nucleoni primari e quindi, usando il libero cammino medio d'assorbimento della radiazione che genera stelle, il valore di I risulterebbe falsato (7). Inoltre considerando trascurabile la percentuale dei nuclei pesanti presenti nella radiazione cosmica primaria, abbiamo preso come libero cammino medio di interazione della radiazione cosmica primaria quello dei protoni primari.

Eseguendo il calcolo troviamo $\sigma = (1,14 + 0,07) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Se la sezione d'urto della generatrice stelle è uguale alla sezione geometrica media σ_e dei nuclei dell'emulsione, il rapporto σ/σ_e indica quale percentuale delle stelle generate a 14 g cm^{-2} dal limite dell'atmosfera si può considerare generata da nucleoni primari. Essendo $0,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ la sezione geometrica media σ_e dei nuclei dell'emulsione Ilford non carica (8), il rapporto σ/σ_e è uguale a $1,43 \pm 0,08$ e quindi circa $2/3$ delle stelle da noi osservate sarebbero attribuibili a nucleoni primari.

La frazione di stelle, $1/3$, non attribuibile a nucleoni primari è piuttosto elevata, benchè a prima vista ciò sembri naturale dato che la radiazione cosmica totale aumenta di circa $1/3$ andando da 0 g cm^{-2} a 14 g cm^{-2} . Ma POMERANTZ (9), misurando la variazione coll'altezza della intensità dei raggi cosmici senza assorbente e sotto 6 cm di Pb, ha trovato un aumento di tale intensità solo nella misura senza assorbente. Né segue che i secondari causa di questo aumento devono essere elettroni e fotoni, cioè una radiazione che non è ritenuta contribuire apprezzabilmente alla generazione delle stelle. Sembra quindi che a 14 g cm^{-2} il numero di secondari capace di generare stelle sia trascurabile rispetto al numero dei primari e che sia più probabile che i nostri risultati siano falsati da stelle generate durante il tempo di permanenza del pallone sotto i 27500 m.

(6) J. A. VAN ALLEN e H. E. TATEL: *Phys. Rev.*, **73**, 245 (1948).

(7) Se ripetiamo il calcolo di BERNARDINI e coll. usando il l.c.m. d'interazione dei protoni primari invece del l.c.m. d'assorbimento della radiazione che genera le stelle, troviamo che solo circa $1/40$ delle stelle a 3500 m sono attribuibili a primari.

(8) Valore ottenuto in base ai dati pubblicati in *The photogenic mesons* di B. T. FELD.

(9) M. A. POMERANTZ: *Phys. Rev.*, **75**, 69 (1949).

FREIER, NEY e OPPENHEIMER (10) danno la frequenza delle stelle fra 300 e 14 g cm⁻² di atmosfera residua e la frequenza fra 24 e 14 g cm⁻², quest'ultima corretta per le stelle generate durante la salita e la discesa del pallone da 300 a 24 g cm⁻². Dato che le nostre lastre sono dello stesso tipo di quelle usate da FREIER, NEY ed OPPENHEIMER, sono state esposte nel medesimo luogo e i tempi di permanenza del pallone al disotto di 27500 m sono circa eguali, riteniamo che la percentuale di stelle generate durante la salita e la discesa del pallone sia la stessa in entrambi i casi. Dai valori di (10) abbiamo quindi calcolato per i vari gruppi di stelle (3-6 rami, 7-9 rami, ≥ 10 rami) la percentuale di stelle generate durante la salita e la discesa del pallone; diminuendo i nostri valori di tale percentuale troviamo a 29000 m una frequenza $N = (1,55 \pm 0,09) \cdot 10^{-2}$ stelle per cm³ e per secondo. Introducendo tale valore di N nella (a) troviamo $\sigma = (0,775 \pm 0,046) \cdot 10^{-24}$ cm²; in tal modo il rapporto σ/σ_0 , diventato uguale a $(0,979 \pm 0,058) \cong 1$ e si può quindi concludere che quasi tutte le stelle, osservate su lastre esposte a 29000 m sono generate da nucleoni primari.

4. — Sulla natura delle particelle emesse dalle stelle generate a 29000 m.

Per sapere se si può spiegare colla teoria dell'evaporazione il meccanismo col quale vengono emesse dalle stelle, osservate su lastre esposte fino a 29000 m le particelle non relativistiche, abbiamo esaminato dettagliatamente 84 stelle, aventi tutte il centro nel mezzo dello spessore dell'emulsione.

Quando la traccia di una particella non termina nell'emulsione è facile scambiare la traccia di un mesone, di un deutone e di un tritone di elevata energia con quella di un protone e così pure si può scambiare la traccia di un frammento nucleare con quella di una particella α ; per tale ragione abbiamo diviso le particelle emesse dalle stelle in due gruppi: particelle con $Z = 1$ (mesoni, protoni, deutoni, tritoni) e particelle con $Z \geq 2$ (particelle α e frammenti nucleari). Dato che HARDING, LATTIMORE e PERKINS (1) — indicati in seguito con H.L.P. — dicono di aver incontrato le nostre stesse difficoltà nell'identificare la particella che ha prodotto una traccia che non termina nell'emulsione e poichè le particelle con $Z = 1$ emesse nelle stelle sono per la massima parte protoni, e le particelle con $Z \geq 2$ sono nella quasi totalità particelle α , riteniamo che i valori dati da H.L.P. per i protoni siano confrontabili con quelli delle nostre particelle con $Z = 1$ ed i valori delle particelle α di H.L.P. siano paragonabili con quelli delle nostre particelle con $Z \geq 2$.

Abbiamo raggruppato le stelle a seconda del numero dei rami in modo da poter confrontare i nostri risultati con quelli dati da H.L.P. e da PAGE

(10) P. FREIER, E. P. NEY e F. OPPENHEIMER: *Phys. Rev.*, **75**, 1451 (1949).

ad altezze montane. In tab. I diamo, per i vari gruppi di stelle, il numero medio per stella di particelle con $Z = 1$, il numero medio per stella di particelle con $Z \geq 2$ ed il rapporto (numero di particelle con $Z \geq 2$)/(numero totale di particelle emesse). Abbiamo pure riportato il rapporto (numero di particelle α)/(numero totale di particelle emesse) dato da PAGE (3) a 3450 m e il rapporto (numero di particelle α)/(numero di particelle $\alpha +$ numero di protoni) ricavato dai dati di H.L.P. (4) relativi a $3457 \div 4400$ m. I precedenti rapporti, riportati in tab. I, col. 5, 6, 7, sono confrontabili fra loro perchè, per quanto

TABELLA I.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
3-6	32	$2,59 \pm 0,28$	$1,62 \pm 0,22$	$0,386 \pm 0,090$	$0,395 \pm 0,073$	$0,339 \pm 0,020$
7-9	25	$4,84 \pm 0,44$	$2,52 \pm 0,32$	$0,342 \pm 0,076$	$0,470 \pm 0,090$	$0,273 \pm 0,025$
≥ 10	27	$9,75 \pm 0,47$	$5,7 \pm 0,65$	$0,374 \pm 0,0049$	$0,396 \pm 0,037$	$0,260 \pm 0,022$

(1) Numero di rami per stella;

(2) Numero di stelle esaminate a 29000 m;

(3) Numero medio di particelle con $Z = 1$ emesse per stella a 29000 m;

(4) Numero medio di particelle con $Z \geq 2$ emesse per stella a 29000 m;

(5)
$$\frac{\text{Numero di particelle con } Z \geq 2}{\text{Numero totale di particelle emesse}} \text{ a 29000 m;}$$

(6)
$$\frac{\text{Numero di particelle } \alpha}{\text{Numero di protoni} + \text{numero di particelle } \alpha} \text{ (H.L.P. } 3457 \div 4400 \text{ m);}$$

(7)
$$\frac{\text{Numero di particelle } \alpha}{\text{Numero totale di particelle emesse}} \text{ (PAGE, a 3450 m).}$$

abbiamo detto sopra, il numero di particelle α è circa uguale al numero di particelle con $Z \geq 2$ e il numero totale di particelle emesse è circa uguale al (numero di particelle $\alpha +$ numero di protoni) di H.L.P.. Come si vede i valori, del rapporto relativo a 29000 m sono per i primi due gruppi di stelle uguali entro gli errori statistici a quelli di H.L.P. e di PAGE, mentre per le stelle con un numero di rami ≥ 10 i nostri valori e quelli di H.L.P. sono uguali fra loro entro gli errori statistici. Inoltre al variare del numero dei rami i

nostri valori e quelli di H.L.P. restano costanti entro gli errori statistici mentre quelli di PAGE presentano un massimo per le piccole stelle. Dato che i nostri valori relativi a 29 000 m, stanno fra quelli di H.L.P. e quelli di PAGE, entrambi relativi ad altezze montane, si può ritenere che il rapporto (numero di particelle con $Z \geq 2$)/(numero totale di particelle emesse) non varia col l'altezza, cioè la distribuzione delle particelle con vario Z emesse nel processo dell'evaporazione non varia sostanzialmente al variare dell'altezza e quindi dell'energia della radiazione che genera stelle.

Abbiamo calcolato la distribuzione dell'energia delle particelle α terminanti nell'emulsione ed emesse dalle 84 stelle osservate dettagliatamente. Il valore dell'energia delle particelle α è stato ottenuto dalla curva range-energia, dopo aver misurato la lunghezza della loro traccia. Dato che più lunga è la traccia, tanto maggiore è per essa la probabilità di uscire dall'emulsione, occorre correggere il numero osservato di particelle α per le tracce che escono dall'emulsione. Se indichiamo con s lo spessore dell'emulsione e con n_i il numero di tracce osservate terminanti nell'emulsione, di lunghezza $l_i > s$ e con energia compresa fra E ed $E + dE$, il numero corretto di particelle α relative all'intervallo di energia E , $E + dE$, sarà dato dalla relazione:

$$(b) \quad N_1 = \sum_i n_i \frac{2l_i}{s}.$$

Se n_r è il numero di tracce osservate terminanti nell'emulsione, di lunghezza $l_r < s$ e con energia compresa fra E ed $E + dE$, il numero corretto di particelle α relative all'intervallo di energia E , $E + dE$ sarà dato analogamente dalla relazione:

$$(c) \quad N_2 = \sum_r n_r \frac{2s}{(2s - l_r)}.$$

La distribuzione in funzione dell'energia cinetica delle particelle α che finiscono nell'emulsione è data in fig. 1a per le particelle α emesse dalle stelle con un numero di rami ≤ 9 a 29 000 m, in fig. 1b per le α emesse dalle stelle con più di 9 rami a 29 000 m, in fig. 1c per le α emesse dalle stelle con più di 9 rami a 3457 ± 4400 m⁽¹⁾. Le spezzate tratteggiate indicano i valori osservati, le spezzate a tratto continuo indicano i valori corretti mediante le (b) e (c).

Dalla fig. 1b e dalla fig. 1c si vede che a 29 000 m come a 3457 ± 4400 m nelle stelle con più di 9 rami una buona parte delle particelle α vengono emesse con energia inferiore a quella della barriera di potenziale (circa 12 MeV per i nuclei dell'emulsione). H.L.P.⁽¹⁾ non danno la distribuzione in funzione dell'energia per le particelle α emesse dalle stelle con meno di 9 rami, ma dicono che le particelle α emesse dalle stelle con 2-3 rami hanno tutte una energia superiore a quella della barriera di potenziale. Noi — come si vede

dalla fig. 1a — troviamo che anche nelle stelle con meno di 9 rami, una buona parte delle particelle α vengono emesse con energia inferiore a quella della barriera di potenziale. Si potrebbe pensare che tali particelle α di bassa energia vengano emesse dalle stelle con più di 3 rami, mentre invece fra le stelle con un numero di rami ≤ 9 esaminate per fare la distribuzione data in fig. 1a, vi sono 11 stelle a 3 rami, queste 11 stelle emettono 13 particelle α delle quali 8 terminano nella emulsione; di queste 8 particelle α ben 5 hanno una energia minore di 8,5 MeV.

Da quanto precede deduciamo che a grande altezza quasi tutte le stelle, e non solamente quelle con molti rami, emettono particelle α con energia minore di quella della barriera di potenziale. Essendo la generatrice di stelle a grande altezza molto più energica che a bassa quota, si può dire che l'emissione di particelle α con energia minore di quella della barriera di potenziale è un fenomeno caratteristico delle stelle generate da particelle molto energiche.

L'emissione di tante particelle α con energia inferiore a quella della barriera di potenziale è stata spiegata colla teoria dell'evaporazione da LE COUTEUR (11), riprendendo l'ipotesi di BAGGE, cioè supponendo che il valore della barriera di potenziale diminuisca col crescere dell'energia di eccitazione. Però mentre per BAGGE il valore della barriera di potenziale per le particelle α è dato dalla relazione:

$$V' = 10 (1 - U/1000) \text{ MeV},$$

per LE COUTEUR è dato dalla relazione:

$$V' = 1,66 \cdot 6/(1 + U/200) \text{ MeV},$$

avendo indicato con U l'energia di eccitazione in entrambe le formule.

Con tale modifica la distribuzione delle particelle α in funzione dell'energia



Fig. 1a). — Distribuzione, in funzione dell'energia cinetica, delle particelle α emesse nelle stelle aventi da 3 a 9 rami e generate a 29 000 m.

----- valori osservati
— valori corretti

(11) K. J. LE COUTEUR: *Proc. Phys. Soc.*, A, 63, 259 (1950).

calcolata da LE COUTEUR, è in accordo coi risultati sperimentali di H.L.P. e di PAGE.

Colle stesse ipotesi fatte per trovare la distribuzione delle particelle α in funzione dell'energia in accordo ai risultati sperimentali, LE COUTEUR trova

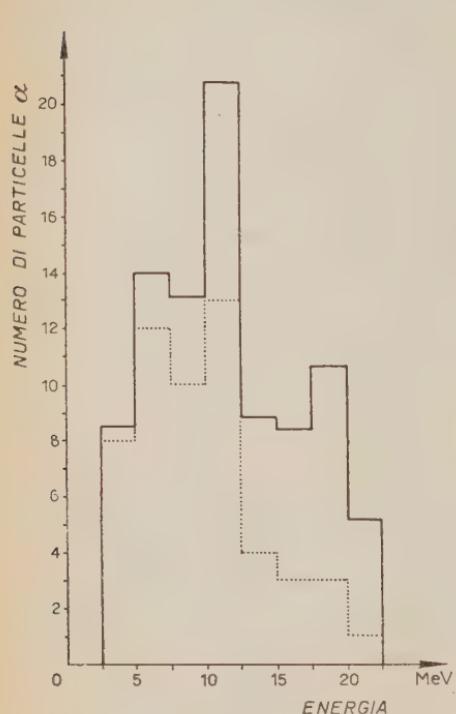


Fig. 1 b). — Distribuzione, in funzione dell'energia cinetica, delle particelle α emesse nelle stelle aventi più di 9 rami e generate a 29 000 m.

----- valori osservati
— valori corretti.

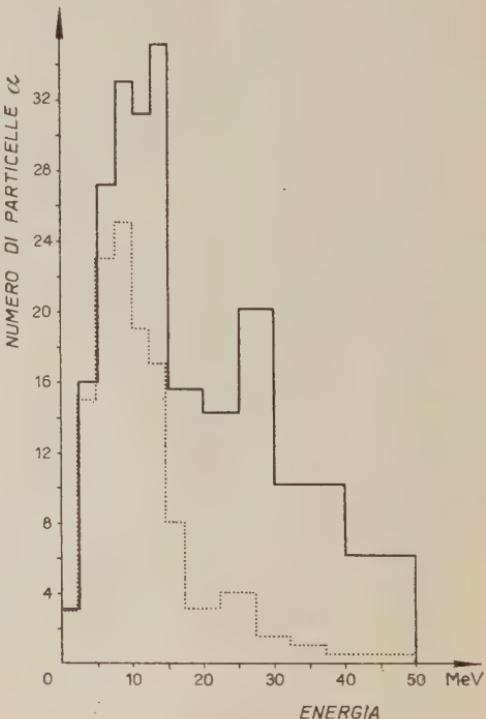


Fig. 1 c). — Distribuzione, in funzione dell'energia cinetica, delle particelle α emesse nelle stelle aventi più di 9 rami, e generate a 3 457 \pm 4 400 m (H.L.P. ⁽¹⁾).

----- valori osservati
— valori corretti.

che il valore del rapporto (numero di particelle α)/(numero totale di particelle emesse) deve essere compreso fra 0,278 e 0,260. Tale valore è in accordo con i dati di PAGE per le stelle con più di 6 rami, ma è più piccolo dei valori trovati da H.L.P. a 3 457 \pm 4 400 m e da noi a 29 000 m (vedi tab. I, col. 5, 6, 7). Tale discordanza può essere dovuta al fatto che le misure sperimentali sono affette oltre che dall'errore statistico calcolato, dall'errore derivante dall'incertezza dell'identificazione del genere delle particelle, oppure si potrebbe pensare che a grande altezza come a bassa quota il numero delle particelle α emesse

è maggiore del valore calcolato da LE COUTEUR in base alle ipotesi fatte per spiegare l'emissione delle particelle di bassa energia. In tal caso potrebbe darsi che le particelle di bassa energia venissero emesse anche con un altro meccanismo. H.L.P. hanno preso in considerazione l'ipotesi di BAGGE (12) secondo la quale nel fenomeno evaporativo il nucleo può emettere dei frammenti nucleari instabili che evaporano dopo aver superato la barriera di potenziale, dando luogo a particelle aventi una energia inferiore a quella della barriera di potenziale. I dati sperimentali in favore di questa ipotesi (dati osservati da H.L.P., da altri autori ed anche da noi) sono: 1) le stelle emettono frammenti nucleari; 2) in alcune stelle sono state osservate tracce che si biforciano, attribuibili a frammenti nucleari instabili; 3) in numerose stelle sono stati osservati fascetti collimati di due, tre, e anche più particelle α ; 4) alcune stelle presentano due frammenti di rinculo.

Dalla fig. 1a e dalla fig. 1b sembrerebbe che a 29 000 m non siano emesse dalle stelle particelle α con energia maggiore di 22,5 MeV, ma alcune delle tracce che non terminano nell'emulsione sono attribuibili a particelle α aventi sicuramente una energia maggiore di 35 MeV.

Il 43% delle 84 stelle da noi osservate presenta il residuo nucleare e precisamente il $43,6 \pm 11\%$ delle stelle con 3-6 rami e il $42,3 \pm 9\%$ delle stelle con un numero di rami > 7 . HARDING (4) a 3 500 m trova che il 45% delle stelle presenta il residuo nucleare e precisamente hanno il residuo nucleare il $34 \pm 3\%$ delle stelle con 2-5 rami e il $58 \pm 4,5\%$ delle stelle con 6-19 rami. La differenza fra i nostri risultati e quelli di HARDING può essere dovuta alla diversa composizione dei gruppi di stelle rispetto al numero di rami, oppure può darsi che a grande altezza non si noti alcuna differenza fra le piccole e le grandi stelle per quanto riguarda la presenza del nucleo di rinculo.

Riassumendo quanto abbiamo detto in questo paragrafo, dal fatto che, a grande altezza come a bassa altezza, il rapporto (numero di particelle con $Z \geq 2$)/(numero totale di particelle emesse) rimane pressoché costante al variare del numero dei rami delle stelle, possiamo dedurre che nelle disintegrazioni nucleari, pur variando l'energia della radiazione che le genera, la distribuzione delle particelle di vario numero atomico Z emesse durante l'evaporazione non dipende dall'energia di eccitazione. Inoltre dato che solo a grande altezza si ha l'emissione di particelle α con energia inferiore a quella della barriera di potenziale, sia per le piccole che per le grandi stelle, mentre a bassa altezza tale emissione si riscontra solo nelle grandi stelle, possiamo concludere che a grande altezza tanto le stelle grandi che le stelle piccole vengono generate da particelle di elevata energia, mentre a bassa altezza solo le stelle grandi sono generate da particelle molto energiche. Questo è in accordo colle nostre conclusioni del paragrafo 3.

(12) E. BAGGE: *Ann. der Phys.*, 39, 512 (1941).

5. — Sulla distribuzione anomala delle stelle.

Per vedere se nella distribuzione spaziale delle stelle generate su lastre esposte fino a 29 000 m si presenta un'anomalia come quella osservata da LEPRINCE-RINGUET e da PERKINS⁽¹³⁾ in lastre esposte a 3 600 m, abbiamo fatto una pianta delle stelle osservate per ogni lastra esaminata.

Nella riga 2 della tab. II diamo il numero P delle coppie di stelle osservate, aventi $r_p = 50, 100, 200, \dots, 700 \mu$, essendo r_p la proiezione sul piano della lastra della distanza fra i centri delle stelle costituenti una coppia. Nella riga 3 della medesima tabella diamo il numero di coppie casuali calcolato colla formula (PERKINS⁽¹³⁾)

$$Q = \frac{1}{2} \pi r_p^2 \frac{N^2}{A},$$

dove A è l'area dalle lastre esplorate espressa in cm^2 ed N il numero di stelle osservate sull'area A .

TABELLA II.

	r_p in μ	50	100	200	300	400	500	600	700
29 000 m	P	2	2	3	5	8	12	12	20
	Q	0,08	0,33	1,34	3	5,35	8,4	12	16,4
	$P - Q$	1,92	1,67	1,66	2	2,65	3,6	0	3,6
	$(P - Q)/\sqrt{Q}$	6,85	2,93	1,43	1,15	1,15	1,24	0	0,9
3 650 m (PERKINS)	r_p in μ	67	131	191	254	381	508	635	762
	$(P - Q)/\sqrt{Q}$	3,3	2,8	2,2	1,7	1,9	2,5	2,4	1,2
3 600 m (LEPRINCE- RINGUET)	r_p in μ	50	100	150	200	250	—	—	—
	$(P - Q)/\sqrt{Q}$	10	8	5	4	4	—	—	—

Il numero $P - Q$ di coppie osservate corretto dalle casuali è dato nella riga 4, mentre nella riga 5 è dato il rapporto $(P - Q)/\sqrt{Q}$ fra la deviazione dalle casuali osservata, $(P - Q)$, e la deviazione dalle casuali calcolata \sqrt{Q} . Dalla tab. II si vede che sia il numero $(P - Q)$ delle coppie osservate corretto dalle casuali, come pure il rapporto $(P - Q)/\sqrt{Q}$ sono maggiori di 1 fino a $r_p \geq 500 \mu$, il che indica che per piccole distanze anche a 29 000 m si presenta un'anomalia nella distribuzione delle stelle. Nella tab. II sono infine riportati i valori del rapporto $(P - Q)/\sqrt{Q}$ ottenuti da LEPRINCE-RINGUET e

⁽¹³⁾ L. LEPRINCE-RINGUET e J. HEIDEMAN: *Nature*, **161**, 844 (1948); T. T. LI e D. H. PERKINS: *Nature*, **161**, 844 (1948).

da PERKINS a 3600 m. Poichè su lastre esposte alla medesima altezza LE-PRINCE-RINGUET e PERKINS trovano dei valori che differiscono fra loro più di quanto non differiscano i nostri da quelli di PERKINS, riteniamo non si possa dire con sicurezza che ci sia una variazione di tale effetto coll'altezza.

In una delle coppie da noi osservata è visibile la traccia di una particella emessa da una stella e generante una seconda stella. Tale traccia è lunga 16μ ; dalle misure di scattering e di densità di granuli sembra che si possa attribuire ad un mesone. La traccia è molto corta e non si può stabilire da quale delle due stelle venga emessa; oltre tale traccia in comune le due stelle hanno una tre rami e l'altra quattro rami.

Per sapere se le coppie di stelle da noi osservate non unite da tracce visibili possono spiegarsi coll'ipotesi che una delle due stelle della coppia è stata generata da una particella emessa dall'altra stella e non visibile sulle nostre lastre, abbiamo calcolato la sezione d'urto per tale fenomeno mediante la formula data da PERKINS (13), ed abbiamo trovato un valore medio di σ uguale a $6,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Tale valore si può interpretare ammettendo che ogni stella generata nell'emulsione emetta almeno 6 particelle capaci di generare stelle con una sezione d'urto di 10^{-24} cm^2 . Siccome le particelle asteroogene (cioè le particelle emesse da una stella e capaci di generarne un'altra) possono essere neutroni e particelle relativistiche e in entrambi i casi la sezione d'urto è dell'ordine di quella geometrica (14), perchè le coppie osservate si possano spiegare colla precedente ipotesi, occorre che il numero medio di particelle asteroogene per stella sia 6. Dal numero di stelle osservate con 3 o più rami (15) troviamo che il numero medio dei rami delle stelle generate a 29000 m su lastre non sensibili agli elettroni, è $5,84 \cong 6$ e di tali rami 3,76 sono attribuibili a protoni. Supponendo che la maggior parte delle stelle sia dovuta a disintegrazioni dei nuclei pesanti dell'emulsione, poichè nei nuclei pesanti il numero dei neutroni è 1,4 volte quello dei protoni, avremo che in media una stella emette $1,4 \cdot 3,76 = 5,26$ neutroni. Inoltre è da tener presente che le nostre lastre non registrano particelle poco ionizzanti e quindi il numero medio di rami a 29000 m sarà più elevato di 6. Infatti dalla distribuzione delle stelle in funzione del numero di rami a 29000 m data da LORD e SCHEIN (16) e ottenuta con lastre sensibili agli elettroni, si ricava che il numero medio dei rami per stella è 7,3 per le stelle con 3 o più rami.

Da questo si può dedurre che a grande altezza, almeno nella maggior parte dei casi, una delle stelle di una coppia è generata da una particella emessa dall'altra stella.

(14) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

(15) M. M. ADDARIO e S. TAMBURINO: *Phys. Rev.*, **76**, 983 (1949).

(16) J. J. LORD e M. SCHEIN: *Phys. Rev.*, **77**, 19 (1950).

6. — Conclusioni.

Come abbiamo detto nell'introduzione lo scopo di questa nota è quello di confrontare le caratteristiche delle stelle da noi osservate su lastre non sensibili agli elettroni, esposte fino a 29 000 m, colle caratteristiche delle stelle osservate da altri autori su lastre dello stesso tipo esposte ad altezza montana. Da quanto precede risulta che:

a) quasi tutte le stelle osservate su lastre esposte a 29 000 m possono considerarsi generate da nucleoni primari;

b) i valori del rapporto (numero di particelle con $Z \geq 2$)/(numero totale di particelle emesse) a 29 000 m e a circa 3 500 m⁽¹⁾ sono uguali entro gli errori statistici; questo indica che la distribuzione delle particelle di diverso numero atomico Z emesse nel processo evaporativo non varia in modo sensibile al variare dell'energia della radiazione che genera le stelle;

c) il rapporto (numero di particelle con $Z \geq 2$)/(numero totale di particelle emesse) non varia sensibilmente al variare del numero dei rami delle stelle, in accordo coi risultati trovati da H.L.P.⁽¹⁾ ad altezza montana; questo indica che la distribuzione delle particelle di diverso numero atomico Z emesse durante l'evaporazione non dipende dall'energia di eccitazione;

d) le particelle α con energia più bassa di quella della barriera di potenziale sono emesse a 29 000 m sia dalle piccole che dalle grandi stelle mentre a 3 457 ± 4 400 m vengono emesse solo dalle grandi stelle. Dato che a 29 000 m quasi tutte le stelle sono generate da particelle molto energiche, mentre a 3 500 m solo le grandi stelle si possono considerare generate da particelle di grande energia, si può concludere che l'emissione delle particelle α di piccola energia è un fenomeno caratteristico delle stelle generate da particelle molto energiche;

e) la distribuzione anomala delle stelle non varia sensibilmente coll'altezza.

Si può quindi concludere che nelle disintegrazioni nucleari il fenomeno evaporativo presenta diverse caratteristiche comuni a grande altezza e a bassa altezza; le differenze esistenti sono da attribuirsi alla maggiore energia della radiazione ché genera stelle ad alta quota.

Ringraziamo vivamente i proff. G. e V. Cocconi per averci procurato le lastre e per i consigli datici.

SUMMARY

Stars produced by cosmic radiation on Ilford C₂ plates at 29 000 m above sea level have been studied by the authors. They have discussed on the radiation that has produced these stars and have inferred from this discussion that this radiation is by the largest part constituted by primary nucleons. The number of the α -particles emitted by stars versus kinetic energy has been plotted. From the results obtained the ratios of α -particles to all particles emitted have been calculated. From these results and from a comparison with those obtained by other authors at low altitude, they come to the following conclusions: in nuclear disintegrations the distribution of the particles emitted in the evaporation does not depend neither upon the excitation energy or upon the energy of the star-producing radiation. In the scanned plates an anomalous distribution of stars has been observed. From a comparison of these results with those obtained at low altitude, they come to the conclusion that, such anomaly is invariable with altitude.

Contribution to the Methods of Measurement of Scattering in the Photographic Plate.

R. LEVI SETTI (*)

Centre de Physique Nucléaire - Bruxelles

(ricevuto il 19 Novembre 1950)

Summary. A comparison is made between the angular and the sagitta methods of measurement of scattering in the photographic plate. The analysis of the errors which may influence the computed energy of a particle permits to define the limits of energy between which the two methods can give useful information and to determine the accuracy obtainable within these limits. Improvements are also described by which the elimination of systematic errors is made possible.

1. - Introduction.

The two methods employed for the measurement of multiple scattering in the photographic plate are the angular (1) (2) (3) (4) and the sagitta (5) methods.

The results obtained by each of these is subject to errors of two kinds. One, the statistical error, is due to the limited number of measurements obtainable on a track of finite length. The other arises from the uncertainty

(*) On leave of absence from the Department of Physics of the University of Pavia.

(1) Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT, G. W. KING, H. MUIRHEAD and D. M. RITSON: *Proc. Phys. Soc.*, **61**, 183 (1948).

(2) J. H. DAVIES, W. O. LOCKE and H. MUIRHEAD: *Como Congress report* in *Nuovo Cimento; Phil. Mag.*, **40**, 1250 (1949).

(3) Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT: *Thesis*, Université libre de Bruxelles, May 1950.

(4) Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT: *Nuovo Cimento*, **7**, 331 (1950).

(5) P. H. FOWLER: *Phil. Mag.*, **41**, 169 (1950).

of the individual measurements of angles or sagittae, due to mechanical imperfections of the measuring instrument, to the random distribution of the developed grains around the path of the particle, and to the personal error of the observer making the measurements. The second error superimposes on the true scattering an additional apparent scattering or noise-level.

If the value of the noise-level is known, it is possible, for not too high energies, to choose cells of sufficient length to maintain it inferior to the true scattering. According to the length of track available, an optimum cell length can be chosen to keep the error due to noise-level smaller than the statistical error. For tracks of very high energy this condition can no longer be satisfied for instrumental reasons, and the noise-level becomes an important factor in the total error, and so limits the maximum energy that can be measured on a given length of track.

An evaluation of noise-level for the different methods is evidently essential and on the basis of noise-level measurements, the angular and the sagitta methods can be compared.

The purpose of this work is to show how, from the analysis of the results of the noise-level measurements, carried out by the two methods and in different instrumental conditions, it is possible to define the limits of energy between which the two methods can give useful information and to determine the accuracy obtainable within these limits.

Corrections are also described that make possible the elimination of systematic errors. The reasons for which one or other of the methods may be preferable are discussed, in function of the energies that must be measured and of the accuracy and speed of the measurements.

2. — Noise level.

For the angular method the value of the angle of each cell is affected by three statistically independent errors (3) (4):

An error ε_1 , due to the random distribution of the grains around the track, proportional to $r/\sqrt{dt^{3/2}}$, where r is the mean distance between the centre of a grain and the true path of the particle, d is the grain density and t is the cell-length.

An error ε_2 due to the inaccuracy of the observer in determining the direction of the track in a cell, and to the thickness of the thread employed in the ocular micrometer,

And an error ε_3 due to the mechanical imperfections of the stage.

The noise-level is given by the mean quadratic value of the sum of errors

$$\varepsilon_{NL} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}.$$

It is not possible to eliminate ε_1 , but its value can be measured and can be reduced by using cells of sufficient length. ε_2 can be rendered negligible by repeated setting; ε_3 is in this case given by the mean quadratic deviation of N measurements on the same cells: $\varepsilon_3 = \sum_i (\bar{\beta} - \beta_i)/N\sqrt{N}$. Finally ε_3 can be eliminated by use of a simple optical device for the control of the stage orientation in every reading. This is possible since for the angular method only the rotations, and not translations, of the stage, are important.

For the sagitta method, each coordinate value is affected by three statistically independent errors:

- ε'_1 due to the assymetrical distribution of the grains, proportional to r/t ;
- ε'_2 due to the inaccuracy of the observer is again present;
- ε'_3 due to the mechanical imperfections of the stage,

which can have a considerable influence on the computed energy in this case.

The three errors are again statistically independent and the noise-level is given by:

$$\varepsilon'_{NL} = \sqrt{\varepsilon'_1^2 + \varepsilon'_2^2 + \varepsilon'_3^2}.$$

The error ε'_2 can be made very small by using an ocular micrometer with movable thread and making the measurements with the highest magnification. In such a way since the image of the thread must be superimposed on a single grain, it is easy to determine its centre with good accuracy and usually there is no need for repeated setting.

The error ε'_3 depends in great part on the translations of the stage: it is difficult to build an optical device to measure and correct such motions but in paragraph 5 a method is described which has made possible a determination of their order of magnitude. To the mechanical errors can be added an error due to the thermal dilatations of the stage when its temperature is not kept rigorously constant and if the stage metal has not a very low temperature coefficient.

3. - Noise-level measurements - Angular method.

Noise-level measurements have been made on the primary track of a giraffe (*). The track is 7 cm long, with a scattering angle in practice immeasurable, having an energy certainly higher than $2.5 \cdot 10^{11}$ eV taking into account the very small emulsion distortion correction.

Every kind of scattering measurement at the moment possible on such

(*) G. P. S. OCCHIALINI: *Como Congress Report* in *Nuovo Cimento*.

a track will give only noise-level, since the true scattering is always inferior to it for every cell length employed.

In such a case noise-level for the longest cells gives the upper limit of the energies that can be measured and the lower limit of the energy of the particle.

Fig. 1 shows the results of noise-level measurements for the angular method on this track, where the value of the mean angle is plotted against cell length, both in logarithmic scale. Curve (1) has been obtained for single settings on every cell and the circles and dots represent respectively measures made by two observers, in order to compare their results.

The value of the noise-level is taken as the arithmetic mean of the angular deviations between successive cells read on a goniometer as used for scattering measurements calibrated in tenths of minute.

Curve (2) of the same diagram represents again noise-level against cell length but every

point is given by the arithmetic mean of the angular deviations taken as arithmetic mean of repeated settings. In this case also, comparisons is given between the results obtained by two observers, the agreement between them is good.

The number of settings for every cell length has been chosen in such a way as to keep the error ε_2 always inferior to the angle between two successive cells. For 100μ cells it has been necessary to take 10 readings for every cell and for 300μ cells, 50 readings for every cell. Every setting is corrected for stage rotations by using an optical device due to Prof. COSYNS (3), (7), consisting of a small mirror fixed with its plane perpendicular to the plate, in front of a telescope giving, by autocollimation, a direct reading of the angular displacement of the plate to 0.1 minute.

Apart from the statistical error, the curve (1) is affected both by the errors ε_1 , and ε_2 , while curve (2) depends only on the error ε_1 , since with the use of repeated setting ε_2 has been made negligible. The difference between the two curves represents in this way the part of noise-level due to reading

(7) C. DILWORTH, S. GOLDSACK, Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT and F. LEVY: *Phil. Mag.*, 41, 1032 (1950).

errors. The different behaviour of the two curves is interpreted as follows: in the first part of the curve (1) the error due to the random distribution of the grains is higher than the reading errors and the noise-level diminishes with increasing cell length, in the last part, on the other hand, $\bar{\varepsilon}_1$ becomes smaller than $\bar{\varepsilon}_2$ which remains practically constant. Curve (2), due only to $\bar{\varepsilon}_1$, is a straight line following the relation:

$$\bar{\varepsilon}_1 = k \frac{r}{\sqrt{d} t^{3/2}}.$$

4. - Noise-level measurements-Sagitta method.

On the same track (see paragraph 3) noise-level measurements have been made for the sagitta method. The microscope employed in this case was a Cooke M. 40126 because of the high degree of mechanical precision required by sagitta measurements. Precautions were taken to avoid thermal dilatations of the stage, very important, when, as in this kind of measurements, deviations measured are of the order of 0.1μ . An ocular micrometer with movable thread was used for the readings; the graduated drum of this, with highest magnification ($\times 95 \times 10$), reads displacements of $1/15 \mu$.

Curve (1) of fig. 2 has been obtained from single settings on each cell, using successive cells. The statistic employed is the same as for the angular method. In this case each point of this curve is given by actual measurements for every cell-length.

Reading errors being negligible, curve (1) represents the sum of the error due to the distribution of the grains and the error due to the stage motion. Error $\bar{\varepsilon}_1$ is higher than the corresponding error ε_1 ; for the angular method, difference arising from the fact that instead of taking the mean line through all the grains of a cell, to determine the direction of the track as the angular method does, the direction of the track for sagitta method is given by the position of a single grain in a cell.

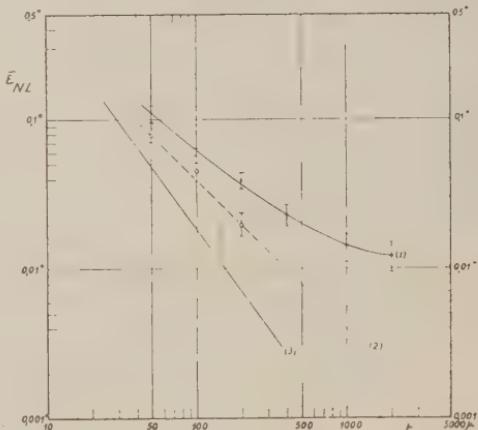


Fig. 2. - Noise-level: (1) Sagitta method; (2) Differential sagitta method; (3) Angular method. Repeated setting.

In the following paragraph a method is described which permits the evaluation of the error $\bar{\varepsilon}_3'$ due to the stage-noise in order to obtain a curve depending only on $\bar{\varepsilon}_1'$.

5. — Stage noise.

A measurement of noise-level which is not affected by the imperfections of the stage can be made if, instead of reading the position of the grain after successive displacements of the stage (normal sagitta method), the reading is taken at two points in the same field, so that the cell is entirely contained within the field of view. This can be done by superimposing on the ocular micrometer a transverse scale, the divisions of which define the cell-length.

Such measurements (differential sagitta method) have been made on 50 μ cells, the noise-level for longer cells is estimated from that for short cells, by adding first differences. In this method it becomes necessary to make repeated settings; the reading error, negligible on a single set of measurements, becomes important in the summation of several cells into one of greater length. For example, in order to obtain a reasonable precision on 200 μ cells calculated from those of 50 μ , each cell had to be measured 5 times.

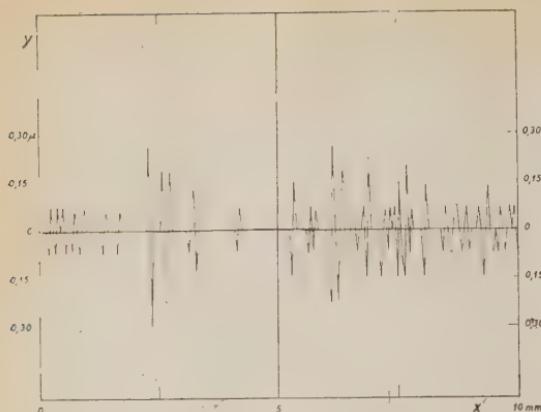
Three points are given which fit a 45° straight line, in double logarithmic scale, (fig. 2, (2)), as expected from the noise-level due only to a random distribution of the grains, proportional to r/t . This line would correspond to the noise-level on an ideal microscope.

A comparison of the line so obtained with curve (1) fig. 2, given by actual measurements, will give us a measure of the order of magnitude of the stage noise, since both curves are affected by the noise-level of the grains, while the curve (1) also contains the stage noise. In the following table some values of stage noise for the microscope employed are indicated:

TABLE I.

t	$\bar{\varepsilon}_3'$	Corresponding angle
50 μ	0,03 μ	0,032°
100 μ	0,04 μ	0,023°
200 μ	0,05 μ	0,015°
400 μ	0,09 μ	0,013°
800 μ	0,15 μ	0,011°

It will be seen that the stage-noise is equivalent neither to a scattering (since the displacement does not increase as rapidly as $t^{3/2}$) nor to a noise-level

Fig. 3. - Stage noise ($t = 50 \mu$).

has been checked for 2 cm displacement by measuring the coordinates of three points of the primary of the giraffe, before and after a rotation of the track through 180° . The first measurement gives a sagitta of 3.2μ , the second a sagitta of 2.6μ . The half difference between these values gives the sagitta for the curvature of the track, equal to 0.3μ for 2 cm, while the mean gives the sagitta for the stage curvature, equal to 2.9μ for 2 cm, or $7 \cdot 10^{-9} t^2 \mu$ for a cell of $t \mu$. Since the errors due to stage curvature are not statistically independent one of each other it becomes necessary to correct for the stage curvature the value obtained for total noise-level, when measurements are made on long cells.

Spherical aberration of the field has also been checked, giving a negligible error on the sagitta, of the order of $10^{-2} \mu$ over the region of the field where the measurements with the differential sagitta method have been made.

It appears clearly from this that the differential sagitta method can be used in actual measurements to eliminate the effect of stage-noise.

6. - Mean sagitta method.

In order to reduce the error due to the random distribution of the grains for the sagitta method, noise-level measurements have been made taking

of constant mean displacement, such as is expected from the random distribution of the grains.

The motion of the stage has been analysed in detail. Fig. 3 is a plot of stage-noise for displacements of 50μ along the x axis of the stage. The histogram in fig. 4 shows the distribution of the values obtained for the stage-noise: the distribution is very nearly a gaussian.

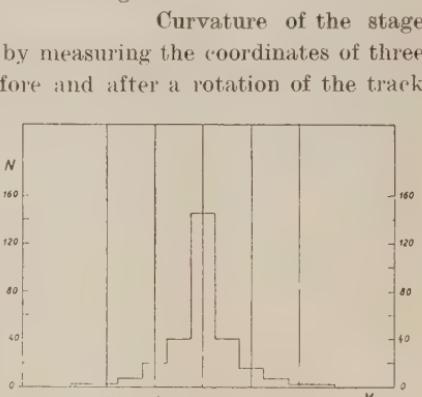


Fig. 4. - Distribution of stage noise.

instead of the coordinate of a single grain, the coordinate of the estimated center of gravity of the grains.

The width of field on which this can be done is limited to that corresponding to the maximum useful magnification. The cell length will remain as the distance taken between the mean points. Curve (1) of fig. 5 gives noise-level for the mean sagitta method, curve (2) of the same diagram shows this noise-level corrected for stage-noise. Noise-level for the latter curve is inferior to that given by the differential sagitta method. It is expected that the noise-level in this case should follow the same law as that for the angular method i. e. $\epsilon \propto t^{-3/2}$. The three points found can be fitted to such a line on double logarithmic scale.

When the cell length is increased beyond the diameter of the field (in this measurements 200 μ) the noise-level will decrease with t^{-1} parallel to that of the differential sagitta method (curve (2) fig. 2) but with a smaller constant. This is indicated in curve (2) fig. 5.

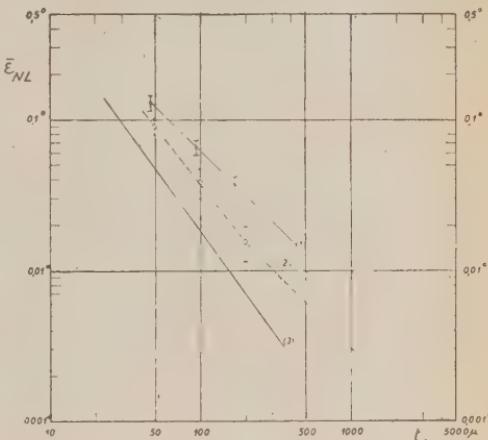


Fig. 5. Noise-level: (1) Mean sagitta method; (2) Corrected mean sagitta method; (3) Angular method. Repeated setting.

7. - Optimum intercellular distance - Relative error.

In the angular method it is found convenient to calculate the mean angle of scattering, not from the difference in direction between successive cells, but from that between alternate cells. i.e. if the measurements made on successive cells are $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \text{ etc.}$, the angles calculated are

$$\alpha_1 = \beta_3 - \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_4 - \beta_2, \quad \text{etc.} .$$

The statistical dependence between α_i is taken into account.

The mean value α so obtained represents the scattering over the distance between the centres of the alternate cells. When the successive cells are taken adjacent, this intercellular distance (i.e.d.) is just twice the cell length t .

The total relative error on the mean angle of scattering $\bar{\alpha}$ is then given by:

$$(1) \quad \varepsilon = 0.02 + \sqrt{\left(\frac{0.66}{\sqrt{N}}\right)^2 + \frac{0.85^2}{2^2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{NL}^2}{\bar{\alpha}^2}\right)^2}$$

where $N + 2$ is the number of successive cells.

In the sagitta method the angle between the chords of adjacent, successive cells is calculated and the total relative error is then:

$$(2) \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{0.53}{\sqrt{N}}\right)^2 + \frac{0.85^2}{2^2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{NL}^2}{\bar{\alpha}^2}\right)^2}.$$

In this case the intercellular distance is equal to the cell length.

The optimum i.c.d. as a function of the length of a track and of the noise-level is that which makes minimum the expression (1) or (2). Optimum i.c.d.

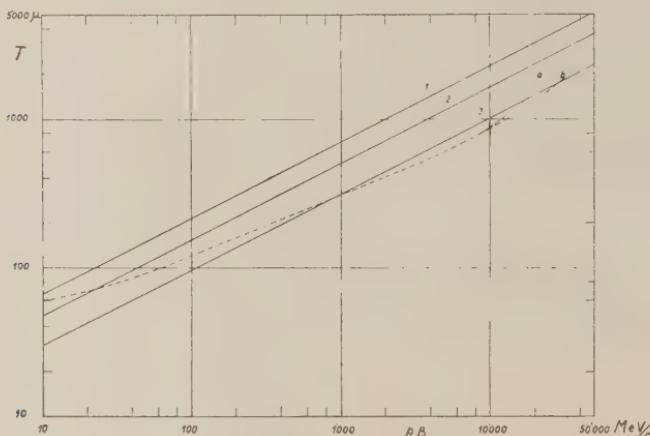


Fig. 6. – Optimum Intercellular Distance. – 1. Sagitta method $\bar{\varepsilon}_{st} = 0.2 \mu$; 2. Sagitta method $\bar{\varepsilon}_{st} = 0.1 \mu$; 3. Differential sagitta method $\bar{\varepsilon}_{st} = 0 \mu$: a, b, Angular method, repeated setting; a) $t_{\max} = 300 \mu$; b) $t_{\max} = 400 \mu$.

have been calculated by using formulae obtained by differentiating expressions (1) and (2), the dependence of noise-level being known.

In fig. 6 curves are given showing the variation of optimum i.c.d. with energy on a track of 1 cm length. In the region of energy from 100 to 1000 MeV these curves are applicable to any length of track. For energies greater than 1000 MeV the statistical error and noise-level error become comparable and the choice of the optimum i.c.d. depends on the length of the track. An extrapolation of the curves for energies below 10 MeV is clearly not always justified.

The curves (a) and (b) of fig. 6 give the optimum i.c.d. for the angular method when the maximum cell contained in the field of the microscope is 300μ and when it is 400μ .

Curve (1) corresponds to the sagitta method when a stage-noise of $0,2 \mu$ constant displacement is present. Curve (2), to the same method for a

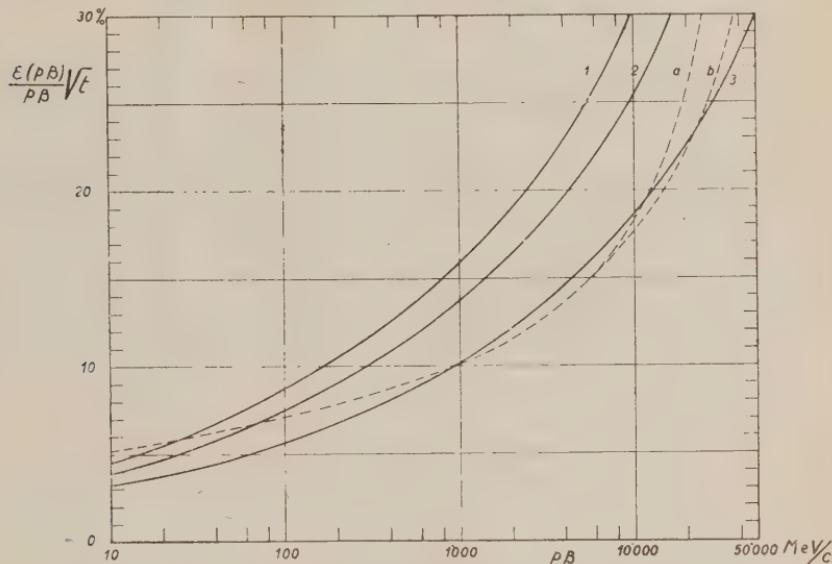


Fig. 7. - Relative error. - 1. Sagitta method $\bar{\varepsilon}_{st} = 0,2 \mu$; 2. Sagitta method $\bar{\varepsilon}_{st} = 0,1 \mu$; 3. Differential sagitta method $\varepsilon_{st} = 0 \mu$; a, b. Angular method, repeated setting; a) $t \text{ max.} = 300 \mu$; b) $t \text{ max.} = 400 \mu$.

stage-noise of $0,1 \mu$ constant displacement and curve (3) to the differential sagitta method i.e. noise-level due only to the grains. $\bar{\varepsilon}'_1 = 0,07 \mu$.

By the use of these curves, the corresponding curves giving the total relative error against energy can be calculated. Relative error is given by the diagram of fig. 7.

The different behaviour of the curves relative to the angular method arises from the fact that the maximum cell length is limited to the diameter of the field of the microscope and this determines a minimum noise-level. For the energies for which the optimum i.c.d. is greater than twice this limiting value, it is necessary to use cells separated by a certain distance. For this reason the total relative error increases much more rapidly than in the case where noise-level always decreases with increasing cell length as for the sagitta method on an ideal stage. The effect of stage-noise on the total error becomes very important for the sagitta method, as shown by curves (1) and (2).

By the evaluation of stage-noise as described in paragraph 5 and by use of optimum i.e.d. curves, it is possible to interpolate between (1) and (2) in order to obtain the error curve relative to a given microscope.

8. — Conclusions.

From measurements such as have been made here it is possible to compare the relative advantages of the two methods of measurement, taking into account the type of microscope available.

The relative error curves of fig. 7 show that on an ideal microscope the precision given by the two methods is practically the same over the greater part of the useful energy range.

In reality no microscope has a perfect movement; even the best available microscopes show an appreciable stage-noise.

In fig. 8 are given the relative error curves on the actual microscope used

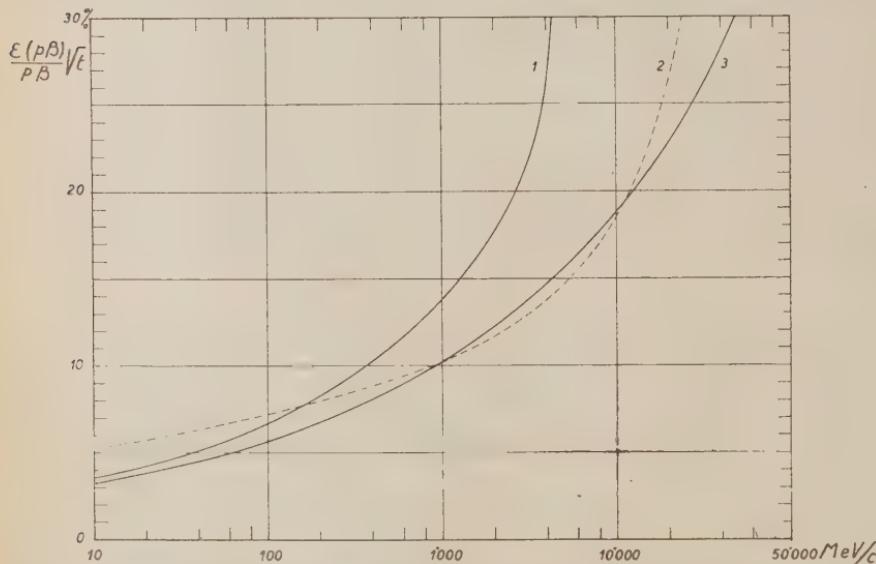


Fig. 8. — Relative error for sagitta (1) and angular method, repeated setting, (2) on an actual microscope; (3) Differential sagitta method.

in this work. Up to 200 MeV the normal sagitta method gives as good or better precision than the angular method and its higher speed makes it preferable. Between 200 MeV and 1000 MeV there is some loss of accuracy in

using the normal sagitta method, but these few percent can often be sacrificed in view of the gain of time.

Above this region of energy it becomes necessary to use either the angular or the differential sagitta method. Both of these require repeated setting, and are therefore slow. In the differential sagitta method, when long cells are needed, a control must be made of the stage curvature.

Ackowlegments.

The author wishes to express his gratitude to Profs. COSYNS and OCCHIALINI for their constant help and encouragement.

He is also indebted to Dr. Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT, Miss C. DILWORTH and Dr. M. MERLIN for their everwilling assistance.

Thanks are due to the Centre de Physique Nucléaire for the hospitality accorded, and to Prof. O. SPECCHIA for kindly granting leave of absence from the Department of Physics of the University of Pavia.

R I A S S U N T O

Si confrontano i metodi di misura di scattering nelle lastre nucleari, il metodo delle tangenti e il metodo delle sagitte. L'analisi degli errori che possono influire sulla misura di energia di una particella permette di definire i limiti di energia entro cui i due metodi possono dare informazioni utili e di calcolare la precisione che si può raggiungere entro tali limiti. Sono inoltre descritti alcuni accorgimenti che permettono di eliminare errori sistematici.

**Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana
nella teoria dei campi d'onda e sulla teoria dei sistemi chiusi.**

NOTA I.

B. FERRETTI

Istituto di Fisica dell'Università - Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 1º Dicembre 1950)

Riassunto. — Nella prima parte di questo lavoro si discutono alcune questioni preliminari relative al problema della generalizzazione agli stati legati dei metodi con cui si possono isolare le divergenze della teoria dei campi.

Introduzione.

A tutti sono ormai noti i recenti interessanti progressi che sono stati compiuti ad opera principalmente di TOMONAGA e collaboratori da una parte ⁽¹⁾ e da SCHWINGER, FEYNMAN, PAULI e VILLARS, DYSON, ecc. ⁽²⁾ dall'altra nel campo della elettrodinamica quantistica.

Prima dei lavori ora ricordati la situazione della elettrodinamica era tale che, applicando la teoria delle perturbazioni non si riusciva ad andare al di là della prima approssimazione non identicamente nulla, perché nelle approssimazioni immediatamente successive comparivano le famose «divergenze» che toglievano ogni significato ai calcoli; né d'altra parte si conosceva un metodo diverso dal perturbativo per trattare praticamente problemi relativi alla teoria dei campi.

Ora, con l'introduzione di un formalismo, almeno apparentemente, cova-

(¹) SIN-ITIRO TOMONAGA: *Prog. Theoret. Phys.*, 1, 27 (1946); KOBA, TATI e S. TOMONAGA: *Prog. Theoret. Phys.*, 2, 101 e 198 (1947); S. TOMONAGA: *Phys. Rev.*, **74**, 224 (1948).

(²) J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **73**, 416 (1948); **74**, 1439 (1948); R. P. FEYNMAN: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948); F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486 (1949) (questo lavoro sarà indicato nel seguito con Dyson I); **75**, 1736 (1949) (indicato in seguito con Dyson II); W. PAULI e F. VILLARS: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949).

riante a vista, e soprattutto con l'artifizio della «rinormalizzazione» delle masse e delle cariche si è riusciti a separare in modo inambiguo le parti divergenti, da considerarsi, in una teoria puramente elettrodinamica (³), quantità inosservabili, ed a calcolare in conseguenza gli effetti osservabili almeno nei primi ordini in cui comparivano le divergenze.

Non occorre ricordare il successo di tali calcoli brillantemente confermati dall'esperienza.

Da un punto di vista più generale restava tuttavia innanzitutto il dubbio se il procedimento di «rinormalizzazione» fosse effettivamente sufficiente ad isolare in modo inambiguo tutte le divergenze in tutti gli ordini di approssimazione. Tale problema è stato almeno parzialmente risolto da un lavoro di DYSON il quale, usando di alcune idee di FEYNMAN, è riuscito a fare una analisi della natura delle divergenze che compaiono nella elettrodinamica in ogni grado di approssimazione e a mostrare che verosimilmente il procedimento di rinormalizzazione può funzionare in ogni ordine della teoria delle perturbazioni. L'analisi di DYSON è però ristretta solo al caso in cui la teoria delle perturbazioni stessa si supponga applicabile e pertanto non si può senz'altro estendere ai problemi in cui si ha a che fare con sistemi «chiusi» (⁴). Quindi non si possono calcolare con la teoria di Dyson, gli autovalori discreti dell'energia dei sistemi atomici e nucleari e nemmeno le probabilità di transizione tra livelli discreti. Ora ciò non ha rilevante importanza pratica nel caso dei sistemi atomici, perché allora si sa bene come procedere in pratica. Si sa che le forze predominanti sono di carattere statico e perciò in una prima approssimazione si possono considerare queste forze soltanto, introducendole per esempio come un «campo esterno», e risolvendo *esattamente* il problema di Schrödinger in questo campo esterno. Le «correzioni radiative» sono poi considerate come piccole perturbazioni. Nel caso dei nuclei tuttavia nessuno probabilmente può dire ora se il procedimento che si usa per gli atomi si può ancora applicare. Non solo: alcune almeno delle così dette «particelle elementari» potebbero

(³) Indubbiamente la differenza tra massa totale e massa elettromagnetica dell'elettrone è una quantità inosservabile, tuttavia in una teoria futura delle particelle elementari essa potrebbe apparire come una parte calcolabile di una quantità osservabile (la massa totale) e calcolabile anch'essa a priori. Non è quindi senz'altro evidente che la nozione, per esempio, di self-energia elettromagnetica dell'elettrone si debba considerare priva di ogni senso.

(⁴) Se sono date più particelle tra cui agiscano forze capaci di condurre alla formazione di un sistema chiuso mentre in assenza di tali forze ciò non è possibile, si può mostrare che non si possono trattare tali forze come piccole perturbazioni almeno nel caso in cui si voglia studiare proprio il sistema chiuso. Quindi in generale se i campi di forza danno luogo a sistemi chiusi, in qualche caso il metodo delle perturbazioni deve fallire. Su questo punto si tornerà più ampiamente nella seconda parte di questo lavoro.

essere particelle composte (come da più parti si suggerisce) (5). Non è molto probabile che si possa applicare lo stesso metodo valido per gli atomi a queste particelle così dette elementari.

A questo proposito vorrei ricordare che molti indizi ci fanno ritenere, che il mero fatto della «interazione» tra particelle così dette elementari ci costringerà probabilmente ad abbandonare, o per lo meno a modificare profondamente, il concetto di particella elementare come qualcosa di semplice, quale è l'usuale concetto di «particella elementare nuda». Di fatto la particella elementare reale per i molteplici fenomeni di polarizzazione del vuoto e simili, a cui essa dà luogo in virtù delle varie interazioni, appare divenire molto più simile a un sistema composto molto complicato che a una «nuda particella elementare».

Ora non è forse improbabile che tale situazione sia di notevole importanza per la risoluzione di quello che resta il problema fondamentale della teoria dei campi: l'eliminazione e non la semplice separazione delle divergenze. Appare possibile che una corretta teoria che conduca alla eliminazione delle divergenze sia anche una teoria delle «particelle elementari» pensate come sistemi chiusi e degli autovalori della energia di tali sistemi chiusi. Anche per questo sembra opportuna una investigazione preliminare sulla possibilità di estendere i risultati di DYSON al caso dei sistemi chiusi.

Con il presente lavoro si intende di portare un contributo alla discussione di questo problema.

Nella prima parte di questo lavoro saranno trattate alcune questioni preliminari di carattere più che altro formale, allo scopo di far vedere come il metodo di Dyson opportunamente precisato si possa usare nel calcolo degli autovalori della energia quando la teoria delle perturbazioni sia applicabile.

Nella seconda parte sarà invece portato un contributo alla risoluzione del problema principale e discusso un metodo che non è necessariamente legato alla applicabilità della teoria delle perturbazioni.

2. — L'operatore $S(t)$ di Dyson e Feynman.

Il punto di partenza del metodo di Dyson consiste nella introduzione di un operatore $S(\sigma)$ dipendente dalla ipersuperficie spaziale σ , che costituisce una generalizzazione della matrice S di Heisenberg: infatti la matrice S di Heisenberg coincide con la matrice $S(\infty)$ di Dyson (6).

Per le considerazioni che saranno svolte in seguito non è affatto essen-

(5) E. FERMI e C. N. YANG: *Phys. Rev.*, **76**, 1739 (1949); W. HEISENBERG: in corso di stampa.

(6) Dyson II; per le considerazioni di questo e dei prossimi numeri confronta anche B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 79 (1950).

ziale mantenere una superficie σ del tutto generale ma basta invece in particolare considerare semplicemente degli iperpiani $t = \text{cost}$ ⁽⁷⁾.

In tal caso l'operatore $S(t)$ la cui definizione sarà richiamata tra breve, permette di costruire la soluzione di una equazione di Schrödinger al tempo t qualora sia nota la soluzione al tempo $-\infty$. Pertanto l'uso dell'operatore S di Dyson non è ristretto alla teoria dei campi, ma è assai più generale e noi lo consideriamo da questo punto di vista più generale in buona parte del presente lavoro.

Si consideri allora una hamiltoniana della forma

$$(2,1) \quad H = H_0 + \lambda V,$$

dove H_0 è una qualche hamiltoniana «imperturbata» indipendente dal tempo. V una energia potenziale e λ un parametro.

L'equazione di Schrödinger relativa alla hamiltoniana (2,1) sarà

$$(2,2) \quad i\hbar \frac{d\varphi}{dt} = (H_0 + \lambda V)\varphi.$$

Si esegua ora la trasformazione canonica generata dall'operatore unitario

$$(2,3) \quad \exp [-iH_0 t/\hbar].$$

Tale trasformazione canonica ci fa passare dalla rappresentazione di Schrödinger a una rappresentazione che chiameremo, in analogia a quanto si usa fare nella teoria dei campi, rappresentazione di interazione. Posto allora

$$(2,4) \quad \varphi = \exp \left[-\frac{iH_0 t}{\hbar} \right] \underline{\varphi},$$

$$(2,5) \quad \underline{V} = \exp \left[\frac{iH_0 t}{\hbar} \right] V \exp \left[-\frac{iH_0 t}{\hbar} \right],$$

la equazione di Schrödinger nella rappresentazione di interazione si scriverà

$$(2,6) \quad i\hbar \frac{d\varphi}{dt} = \lambda \underline{V} \varphi.$$

Si definisca allora formalmente un operatore $S(t)$ come prodotto infinito ⁽⁸⁾:

$$(2,7) \quad \Pi(t) = \lim \Pi_t \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(t) \underline{V} dt \right],$$

il prodotto estendendosi da $t = -\infty$ fino a t (i termini relativi a tempi seguenti vanno posti a sinistra di quelli relativi a tempi precedenti) e inten-

⁽⁷⁾ Nei numeri 9, 10 verranno estese le considerazioni qui fatte al caso di σ generale e con ciò sarà discussa la covarianza del procedimento.

⁽⁸⁾ Dyson I - formula 10.

dendosi preso al limite per $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ infinitesimo.

Supposto che l'operatore così definito esista, per il modo stesso con cui esso è costruito, esso deve essere un operatore unitario; inoltre si deve avere che:

$$(2,8) \quad \underline{\varphi}(t) = \Pi(t)\underline{\varphi}(-\infty) .$$

e pertanto, come si è detto, esso ci permette di costruire la soluzione della (2) o della (6) a partire dalla conoscenza di $\underline{\varphi}(-\infty)$.

Naturalmente la definizione che è stata data dell'operatore $\Pi(t)$ è per ora del tutto formale, e il suo senso va precisato mostrando come si possa effettivamente costruire un operatore $\Pi(t)$. Questa questione sarà tuttavia da noi trattata più avanti, e per ora ci accontenteremo di supporre che l'operatore $\Pi(t)$ esista, ossia si sappia effettivamente costruire in modo univoco, e goda effettivamente delle proprietà che risulterebbero dalla definizione formale.

3. — L'accensione adiabatica della carica.

La definizione (2,7) dell'operatore Π è valida anche se λ dipende dal tempo. Si supponga ora che λ , nullo per $t = -\infty$, vada aumentando molto lentamente col tempo, al limite con infinita lentezza. Si supponga inoltre, per un momento, per fissare le idee, che $\underline{\varphi}(-\infty)$ sia uno stato stazionario φ_{0n} definito di H_0 . Allora per un noto teorema di meccanica quantistica, poiché noi facciamo crescere λ adiabaticamente, $\underline{\varphi}(t)$ sarà a meno di infinitesimi, ancora lo stato stazionario $\varphi_n(\lambda)$ relativo alla hamiltoniana $H_0 + \lambda V$. In altre parole, l'operatore Π trasforma l'autofunzione $\varphi_n(\lambda)$ dell'operatore $H_0 + \lambda V$ (dove λ va assunto costante col valore che ha al tempo t) nella autofunzione φ_{0n} dell'operatore H_0 . Quindi l'operatore

$$(3,1) \quad \mathcal{E}(\lambda) = \Pi^{-1}(t)(H_0 + \lambda V)\Pi(t) ,$$

ha gli stessi assi dell'operatore H_0 e commuta con H_0 . Si noti inoltre che per la stessa ragione, nonostante che λ dipenda dal tempo e quindi gli operatori $H_0 + \lambda V$ a due tempi diversi non siano commutabili, gli operatori $\mathcal{E}(\lambda)$ lo sono (naturalmente tali proprietà valgono sotto le ipotesi fatte alla fine del n. 2, e quindi non si debbono per ora considerare come stabilite se non provvisoriamente ^(*)).

Concludendo, sotto la ipotesi dell'accensione adiabatica della carica, ci si deve attendere che l'operatore $\Pi(t)$ diagonalizzi la hamiltoniana $H_0 + \lambda V$ nel senso precisato sopra.

(*) Vedi parte II del presente lavoro.

4. — Introduzione della teoria della perturbazione.

Secondo DYSON qualora la teoria della perturbazione fosse applicabile, assumendo λV come piccola perturbazione (10), si dovrebbe avere

$$(4,1) \quad \Pi(t) = S(t) ,$$

dove

$$(4,2) \quad S(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \lambda \underline{V} dt - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t \lambda(t_1) \underline{V}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \lambda(t_2) \underline{V}(t_2) dt_2 + \dots .$$

Ora anche nel caso in cui la teoria delle perturbazioni sia applicabile, occorre una certa cautela nell'uso della (4,1). Infatti, tenendo conto di quanto abbiamo osservato nel n. 3) e ricordando la formula (4,1) e (4,2) ci si dovrebbe attendere che l'operatore

$$(4,3) \quad H_T(\lambda) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \lambda \underline{V} dt - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t \lambda(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \lambda(t_2) \underline{V}(t_2) V(t_1) dt_2 + \dots \right] \times \\ \times (H_0 + \lambda V) \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \lambda \underline{V} dt_1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t \lambda(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \lambda(t_2) \underline{V}(t_1) V(t_2) dt_2 + \dots \right] .$$

fosse identico a $\mathcal{E}(\lambda)$ come definito dalla (3,1) e quindi un operatore diagonale insieme ad H_0 , almeno nel caso in cui la teoria delle perturbazioni sia applicabile.

Ora ciò non risulta senz'altro vero, a meno che non si prendano speciali precauzioni per definire gli integrali che compaiono nella (4,2) e nella (4,3), i quali, come si rileva immediatamente, se λ viene assunto costante, non sono convergenti (11).

Occorre innanzi tutto tener conto *esplicitamente* della accensione adiabatica della carica, e ciò può apparire abbastanza naturale dopo le osservazioni del n. 3. Come vedremo questa precauzione però non è sufficiente in generale, ma soltanto nel caso particolare in cui lo spettro di autovalori della energia del sistema che si considera sia costituito da uno spettro continuo.

Per discutere questo punto, è abbastanza istruttivo calcolare esplicitamente l'operatore (4,3) come sarà fatto nei prossimi numeri.

(10) Dyson I — paragrafo III.

(11) Naturalmente questo fatto non ha nulla da vedere con le « divergenze » dovute alle teorie dei campi.

5. — Calcolo dell'operatore $H_T(\lambda)$. L'operatore $H_{T,0}(\lambda)$.

Secondo la (4.3) l'operatore $H_T(\lambda)$ risulta costituito dalla somma di due parti. La prima parte, che indicheremo con $H_{T,0}(\lambda)$ è data da:

$$(5,1) \quad H_{T,0}(\lambda) = S^{-1}H_0S,$$

la seconda $H'_T(\lambda)$ è

$$(5,1\text{-}bis) \quad H'_T(\lambda) = S^{-1}\lambda VS.$$

Ora si può facilmente verificare ⁽¹²⁾ che:

$$(5,2) \quad S^{-1}H_0S = \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right) H_{T,0}^{(n)},$$

dove

$$(5,2\text{-}bis) \quad H_{T,0} = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left[\lambda V(t_n), \left[\lambda V(t_{n-1}), \left[\dots, \left[\lambda V(t_1), H_0 \right]_-, \dots \right]_- \right]_- \right]_-.$$

D'altra parte se V non dipende esplicitamente dal tempo si può osservare che ⁽¹³⁾:

$$(5,3) \quad \left[\lambda V, H_0 \right]_- = \hbar i \left(\frac{d(\lambda V)}{dt} - \frac{d\lambda}{dt} V \right).$$

Ne segue:

$$(5,4) \quad H_{T,0}^{(n)} = H_{T,0}^{(n,a)} + H_{T,0}^{(n,b)},$$

dove:

$$(5.4\text{-}bis) \quad H_{T,0}^{(n,a)} = \hbar i \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left[\lambda V(t_n), \left[\dots, \left[\lambda V(t_2), \frac{d(\lambda V(t_1))}{dt_1} \right]_- \dots \right]_- \right]_-$$

$$(5.4\text{-}ter) \quad H_{T,0}^{(n,b)} = -i\hbar \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left[\lambda V(t_n), \left[\dots, \left[\lambda V(t_2), \lambda V(t_1) \right]_- \dots \right]_- \right]_-.$$

La forma della (5.4-bis) suggerisce senz'altro che tramite una integrazione per parti rispetto alla variabile t_1 i termini $H_{T,0}^{(n,a)}$ si debbono ricondurre a termini dello stesso tipo di quelli da cui risulterà composta la seconda parte di H_T . Tuttavia, data la presenza dei successivi commutatori uno dentro

⁽¹²⁾ Dyson I, paragrafo V.

⁽¹³⁾ Vedi, per esempio, G. WENTZEL: *Quantum Theory of Fields*, p. 17.

l'altro nella (5,4-bis) la verifica diretta risulterebbe piuttosto laboriosa. Conviene quindi in analogia a quanto è stato fatto da DYSON (14) introdurre l'operatore H_F mediante la seguente relazione

$$(5,5) \quad H_F = S(\infty) H_T .$$

Analogamente

$$(5,6) \quad H_{F,0} = S(\infty) H_{T,0} .$$

Si può facilmente verificare che (15)

$$(5,7) \quad H_{F,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{i}{h}^n H_{F,0}^{(n)} ,$$

dove

$$(5,7-bis) \quad H_{F,0}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \cdot P(H_0 \underline{\lambda} V(t_1), \dots \underline{\lambda} V(t_n)).$$

L'operatore P significa che gli operatori $\underline{V}(t_r)$ vanno presi in ordine di tempo crescente.

Cio posto si può osservare che se si pone:

$$(5,8) \quad S(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{i}{h}^n S_{\infty}^{(n)} ,$$

per il principio di identità delle serie di potenze si deve avere:

$$(5,9) \quad F_{F,0}^{(n)} = \sum_{r=0}^n S_{\infty}^{(r)} H_{T,0}^{(n-r)} \quad (H_{T,0}^{(0)} = H_0) .$$

D'altra parte si noti che se si pone

$$(5,10) \quad S^{-1} \left[\underline{\lambda} V, H_0 \right] S = H_{T,1} = \sum \binom{i}{h}^n H_{T,1}^{(n)} ,$$

si può verificare, in un modo identico a quello che si deve usare per verificare la (5,2-bis) (basta sostituire, al posto di H_0 , $\left[\underline{\lambda} V(t), H_0 \right]$) che si ha:

$$(5,10-bis) \quad H_{T,1}^{(n)}(t) \\ = \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left[\underline{\lambda} V(t^n), \left[\dots \left[\underline{\lambda} V(t_2), \left[\underline{\lambda} V(t_1), \left[\underline{\lambda} V(t), H_0 \right] \right] \right] \dots \right] \right] .$$

(14) Dyson I, paragrafo V.

(15) La verifica è identica a quella relativa alla formula (31) di Dyson I.

Conseguentemente si ottiene, sempre ricordando la (5,2-bis):

$$H_{T,0}^{(n)} = \int_{-\infty}^t dt_1 H_{T,1}^{(n-1)}(t_1).$$

Pertanto, tenendo presente che $S_{\infty}^{(r)}$ non dipende dal tempo, si può scrivere:

$$S_{\infty}^{(r)} H_{T,0}^{(n-r)} = \int_{-\infty}^t dt_1 S_{\infty}^{(r)} H_{T,1}^{(n-r-1)}(t_1) \quad (n-r \geq 1).$$

Ne segue, tenendo presente (5,9) che

$$(5,11) \quad H_{F,0}^{(n)} = \int_{-\infty}^t dt_1 H_{F,1}^{(n-1)} + S_{\infty}^{(n)} H_0,$$

dove $H_{F,1}^{(n-1)}$ è definito in modo analogo a $H_{T,1}^{(n-1)}$, dalla relazione:

$$(5,11\text{-bis}) \quad H_{F,1}^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \cdot P\left(\left[\lambda V(t), H_0\right], \lambda V(t_1) \lambda V(t_2) \dots \lambda V(t_n)\right).$$

La consistenza di tale definizione si verifica nel solito modo.

Confrontando la (5,7) con la (5,11) segue finalmente

$$(5,12) \quad H_{F,0} = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt_1 H_{F,1}(t_1) + S_{\infty} H_0,$$

dove

$$(5,12\text{-bis}) \quad H_{F,1} = \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n H_{F,1}^{(n)} = S(\infty) S^{-1} \left[\lambda V H_0 \right] S.$$

6. — Definizione e calcolo dell'operatore $\int_{-\infty}^t dt_1 H_{F,1}^{(n)}(t_1)$.

Ricordando la (5,3) e la (5,11-bis) si può scrivere:

$$(6,1) \quad H_{F,1}^{(n)}(t) = H_{F,1}^{(n,a)} + H_{F,1}^{(n,b)},$$

dove

$$(6,1\text{-bis}) \quad H_{F,1}^{(n,a)}(t) = i\hbar \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n P\left(\frac{d\lambda V}{dt}, \lambda V(\tau_1) \dots \lambda V(\tau_n)\right).$$

Vogliamo dimostrare la seguente relazione fondamentale:

$$(6,2) \quad \int_{-\infty}^t H_{F,1}^{(n)}(t) dt = i\hbar \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n P(\lambda V(t), \lambda V(\tau_1) \dots \lambda V(\tau_n)).$$

Allo scopo si noti che $H_{F,1}^{(n,a)}$ si può scrivere come la somma di $(n+1)!$ termini $A_{\tau, \mathcal{P}}$ ciascuno contrassegnabile da una permutazione \mathcal{P} degli indici

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ e dal posto r occupato dal fattore $d\lambda V(t)/dt$. Per esempio se con φ indichiamo la permutazione identica possiamo scrivere (16):

$$A_{r,\varphi} = \hbar i \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau_1 \dots \int_{\tau_r}^{\infty} d\tau_{r-1} \int_t^{\infty} d\tau_r \int_{-\infty}^{\tau_{r+1}} d\tau_{r+1} \dots \int_{-\infty}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \lambda \underline{V}(\tau_1) \dots \lambda \underline{V}(\tau_r) \times \\ \times \frac{d\lambda V}{dt} \lambda \underline{V}(\tau_{r+1}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_n).$$

Consideriamo ora l'integrale:

$$(6,3) \quad \int_{-\infty}^t dt A_{r,\varphi} = \hbar i (-1)^n \int_{-\infty}^t dt \int_{\tau_{p_1}}^{\infty} d\tau_{p_1} \dots \times \\ \times \int_{\tau_{p_r}}^{\infty} d\tau_{p_{r-1}} \int_t^{\infty} d\tau_{p_r} \int_{-\infty}^{\tau_{p_{r+1}}} d\tau_{p_{r+1}} \dots \int_{-\infty}^{\tau_{p_{n-1}}} d\tau_{p_n} \lambda \underline{V}(\tau_{p_1}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_r}) \frac{d(\lambda V)}{dt} \lambda \underline{V}(\tau_{p_{r+1}}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_n}),$$

dove

$$\varphi = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{Bmatrix}.$$

Integrando il secondo membro di (6,3) per parti rispetto alla variabile t si ottengono in generale tre termini:

$$(6,4) \quad \begin{aligned} A_{r,\varphi}^{(1)} &= i \hbar \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\tau_{p_2}}^{\infty} d\tau_{p_1} \dots \int_t^{\infty} d\tau_{p_r} \int_{-\infty}^{\tau_{p_{r+1}}} d\tau_{p_{r+1}} \dots \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\tau_{p_{n-1}}} d\tau_{p_n} \lambda \underline{V}(\tau_{p_1}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_r}) \lambda \underline{V}(t) \lambda \underline{V}(\tau_{p_{r+1}}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_n}), \\ A_{r,\varphi}^{(2)} &= i \hbar \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt \int_{\tau_{p_2}}^{\infty} d\tau_{p_1} \dots \int_t^{\infty} d\tau_{p_{r-1}} \int_{-\infty}^t d\tau_{p_{r+1}} \dots \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\tau_{p_{n-1}}} d\tau_{p_n} \lambda \underline{V}(\tau_{p_1}) \dots \lambda \underline{V}(t) \lambda \underline{V}(t) \lambda \underline{V}(\tau_{p_{r+1}}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_n}), \\ A_{r,\varphi}^{(3)} &= -i \hbar \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt \int_{\tau_{p_2}}^{\infty} d\tau_{p_1} \dots \int_t^{\infty} d\tau_{p_r} \int_{-\infty}^{\tau_{p_{r+2}}} d\tau_{p_{r+2}} \dots \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\tau_{p_{n-1}}} d\tau_{p_n} \lambda \underline{V}(\tau_{p_1}) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_r}) \lambda \underline{V}(t) \lambda \underline{V}(t) \dots \lambda \underline{V}(\tau_{p_n}), \quad (r \neq 0, n). \end{aligned}$$

(16) Nella formula che dà $A_{r,\varphi}$ e nelle (6,3) e (6,4) l'ordine con cui sono scritti gli

$$(6,4\text{-}bis) \quad A_{0,\mathcal{P}}^{(2)} = 0 ; \quad A_{n,\mathcal{P}}^{(3)} = 0 .$$

Ora la somma estesa a tutte le permutazioni \mathcal{P} e agli indici r dei termini del tipo $A_r^{(1)}$ dà precisamente il secondo membro della (6,2). Resta a dimostrarsi che il contributo degli altri termini è nullo. Allo scopo basta osservare che:

$$(6,5) \quad A_{r,\mathcal{P}}^{(2)} = -A_{r-1,\mathcal{P}}^{(3)}, \quad (r \neq 0)$$

e ricordare la (6,4-bis).

La (6,2) è così verificata.

Se ora noi poniamo

$$(6,6) \quad H_{F,1}^{(a)}(t) = \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n H_{F,1}^{(n,a)},$$

otteniamo in base alla (6,2) e con un procedimento analogo a quello che bisogna seguire per verificare la (5,7) e la (5,7-bis)

$$(6,7) \quad \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t H_{F,1}^{(a)}(t_1) dt_1 = S(\infty) S^{-1}(t) \lambda V S(t) .$$

Ricordando ora la (5,5), la (5,12), la (5,12-bis) e la (6,1) otteniamo:

$$(6,8) \quad H_F = S(\infty)(H_{T,0} - S^{-1}\lambda V S) = S(\infty)H_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n H_{F,1}^{(n,b)}(t_1) dt_1 .$$

dove

$$(6,1\text{-}ter) \quad H_{F,1}^{(nb)}(t) = -i\hbar \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n P(\lambda V(t), \lambda V(\tau_1) \dots \lambda V(\tau_n)) .$$

Questo risultato è abbastanza interessante. Innanzi tutto si scorge in base alla (6,1-ter) che il calcolo di H_F e quindi di H_T è ricondotto al calcolo di integrali del tipo di Feynman-Dyson. In secondo luogo si scorge che è proprio essenziale tener conto esplicitamente della accensione adiabatica della carica: non basta a questo scopo ignorare semplicemente i termini indefiniti che a integrazione avvenuta provengono da $t = -\infty$ (oppure da $t = +\infty$). Se infatti bastasse ignorare tali termini, bisognerebbe porre uguale a zero il ter-

mine $\frac{i}{\hbar} \cdot \int_{-\infty}^t \Sigma (i/\hbar)^n H_{F,1}^{(n,b)}(t_1) dt_1$ nella (6,8).

operatori $\int d\tau_k$ non indica l'ordine con cui vanno eseguite le integrazioni (per esempio nella (6,3) l'integrazione rispetto alla variabile τ_{p_2} va eseguita prima di quella rispetto alla variabile τ_{p_1}). Nelle dette formule gli operatori $\int d\tau_k$ si devono intendere operanti indifferentemente a destra o a sinistra.

Ora come vedremo esplicitamente nei prossimi numeri tale termine è in generale tutt'altro che nullo anche al limite per $\lambda = 0$.

Ma ciò del resto è evidente, perchè in caso contrario si avrebbe $H_T = S(\infty)H_0$ e quindi $H_T = H_0$, risultato evidentemente assurdo.

7. — Verifica della diagonalità di H_T .

Ricordando la (6,8) possiamo scrivere:

$$(7,1) \quad H_T = S^{-1}(\infty)H_F = H_0 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n S^{-1}(\infty) H_{F,1}^{(n,b)}.$$

Ora tenendo presenti la (5,4-ter), la (5,7) e la (5,7-bis), nonchè la (5,11-bis), la (5,12), la (6,1) e la (6,1-ter) si ha immediatamente:

$$(7,2) \quad \int_{-\infty}^t \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n S^{-1}(\infty) H_{F,1}^{(n,b)} = \Sigma \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n H_{T,0}^{(n,b)}.$$

Dovremmo ora verificare semplicemente la diagonalità di $\Sigma (i/\hbar)^n H_{T,0}^{(n,b)}$ nell'ipotesi che dovrà essere soddisfatta quando la teoria delle perturbazioni è valida, e si accende adiabaticamente la carica, della convergenza della serie stessa.

Ma poichè detta serie non è che una serie di potenze nella variabile i/\hbar la verifica della sua diagonalità si riconduce alla verifica della diagonalità di tutti i suoi coefficienti.

Dovremmo in altre parole verificare che $H_{T,0}^{(n,b)}$ è diagonale qualunque sia n .

Per fissare le idee e semplificare la verifica poniamo:

$$(7,3) \quad \lambda = \begin{cases} e^{at} & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}.$$

Supponiamo inoltre di racchiudere il sistema in un Hohraum Ω che poi faremo tendere all'infinito. Ricordiamo inoltre che la diagonalità va verificata nel riferimento stesso in cui H_0 è diagonale.

Conseguentemente, indicando con E_a l'autovalore di H_0 nello stato specificato dall'indice a e con $V_{a,b}$ il generico elemento di matrice di V , dobbiamo calcolare espressioni del tipo (cfr. la (5,4-ter)):

$$(7,4) \quad \alpha \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \Sigma_{a_1, a_2, \dots, a_n} V_{a_1 a_2} V_{a_2 a_3} \dots V_{a_n a_{n+1}} \times \\ \times \{ \exp(\alpha + iE_{a_1} - iE_{a_2}) t_1 [\exp(\alpha + iE_{a_2} - iE_{a_3}) t_2 \dots] \dots - \\ - \exp(\alpha + iE_{a_{n+1}} - iE_{a_n}) t_n \dots \},$$

ove si è posto per semplicità $\hbar = 1$ e si è preso $t = 0$.

Si può dimostrare in generale che la (7,4) si riduce a qualcosa come

$$(7,5) \quad H_{T,0}^{n,b} = -i \frac{\alpha}{n\alpha + iE_{a_1} - iE_{a_{n+1}}} K_{a_1, a_{n+1}}^{(n)},$$

dove se V è finito e se Ω si fa tendere all'infinito previamente $K_{a_1, a_{n+1}}^{(n)}$ è una quantità che rimane finita o nulla quando si fa tendere a zero α . La verifica della (7,5) è nel caso generale abbastanza laboriosa e sarà data per sommi capi in appendice.

Tuttavia vogliamo subito osservare in primo luogo, che, se $K_{a_1, a_{n+1}}^{(n)}$ rimane finito al limite per $\alpha \rightarrow 0$, soltanto gli elementi matrice $H_{0,T,a_1, a_{n+1}}^{(n,b)}$ con $E_{a_1} = E_{a_{n+1}}$ possono essere diversi da zero, come ci si aspettava, ma in secondo luogo, che questo risultato è condizionato però ad assumere Ω infinito. Questo sembra in contraddizione con le considerazioni svolte nei numeri 3 e 4, poichè secondo tali considerazioni l'unica condizione da porsi al processo di diagonalizzazione che abbiamo seguito sembrava essere l'applicabilità della teoria delle perturbazioni. Allo scopo di chiarire le affermazioni precedenti, pur rimanendo, come si è detto, la verifica generale della (7,6) all'appendice, ritengo utile darne esplicitamente la verifica nel caso particolare e semplice di $n = 2$.

Per $n = 2$ dovremo considerare una espressione del tipo

$$(H_T^{(2)})_{a,b} = -i\alpha \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \sum_c V_{a,c} V_{cb} \times \{ \exp [(\alpha + iE_a - iE_c)t_2 + (\alpha + iE_c - iE_b)t_1] - \exp [(\alpha + iE_c - iE_b)t_2 + (\alpha + iE_a - iE_c)t_1] \}.$$

Eseguendo le integrazioni elementari indicate otteniamo

$$(H_T^{(2)})_{a,b} = -i\alpha \sum_c V_{a,c} V_{cb} \left[\frac{1}{2\alpha - i(E_a - E_b)} \left| \frac{1}{\alpha + i(E_a - E_c)} - \frac{1}{\alpha + i(E_c - E_b)} \right| \right].$$

Passando al limite per α tendente a zero otteniamo i termini diagonali:

$$(7,6) \quad (H_T^{(2)})_{a,a} = -\sum_{c \neq a} \frac{V_{ac} V_{ca}}{E_a - E_c},$$

ed i termini *non* diagonali

$$(7,6\text{-bis}) \quad (H_T^{(2)})_{a,b} = \frac{1}{E_a - E_b} V_{a,b} [V_{bb} - V_{aa}].$$

Per generalità abbiamo supposto i termini diagonali della interazione diversi da zero contrariamente a quello che normalmente avviene nella teoria dei campi. Naturalmente se i termini V_{aa} fossero nulli si otterebbero lo stesso termini non diagonali di H_T per $n > 2$.

Si noti che i termini diagonali sono (correttamente) quelli che si sareb-

berò ottenuti con la teoria delle perturbazioni e si può verificare facilmente che ciò rimane vero anche nella terza approssimazione, (e anche nella quarta se i termini diagonali di V sono nulli). Si noti inoltre che se facciamo tendere il volume Ω all'infinito la somma che compare nei termini diagonali si può trasformare in un integrale moltiplicando detti termini per il peso statistico che contiene a fattore precisamente il volume Ω .

Ne segue che quando si fa tendere Ω all'infinito i termini non diagonali vanno a zero molto più rapidamente che i termini diagonali e precisamente il rapporto tra il generico termine non diagonale e il generico termine diagonale tende a zeero come $1/\Omega$.

Questa proprietà resta vera qualunque sia n .

Analogamente i termini diagonali differiscono da quelli corretti che si possono ottenere mediante la ordinaria teoria delle perturbazioni per addendi che similmente divengono trascurabili rispetto all'addendo principale quando Ω tende all'infinito.

In conclusione, mentre da una parte sembra che per un volume infinito le previsioni dei numeri 3 e 4 siano verificate, esse non lo sono quando Ω rimane finito.

È evidente che la ragione di questo fatto deve essere chiarita prima di proseguire nella nostra indagine; ciò sarà fatto nel prossimo numero.

8. – Condizioni per la validità della relazione (4,1).

L'esame della questione che ci siamo posti nel numero precedente, cioè la ricerca della ragione per la quale l'operatore H_T definito mediante la (4,3) non è diagonale, quantizzato in uno spazio finito, contrariamente a quanto ci si poteva aspettare, mostra che la radice della difficoltà sta nel fatto che l'equazione (4,1) non è senz'altro valida nel caso in cui la teoria delle perturbazioni sia applicabile a meno che non si prendano speciali precauzioni nel ridefinire gli integrali che compaiono nella (4,2).

La ragione è piuttosto semplice (17). Come si è osservato nel n. 3, se lo stato $\varphi(-\infty)$ coincide con lo stato stazionario φ_{0n} di H_0 e se si accende adiabaticamente la carica, lo stato $\varphi(t)$ sarà ancora lo stato stazionario $\varphi_{\lambda,n}(t)$ relativo alla hamiltoniana $H_0 + \lambda V$. Tale stato sarà rappresentabile mediante la formula:

$$(8,1) \quad \varphi_{\lambda,n}(t) = \bar{\varphi}_n(\lambda) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t E_n(\lambda) dt' \right],$$

dove $\bar{\varphi}_n(\lambda)$ non dipende esplicitamente dal tempo.

(17) Vedi anche B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, 7, 783 (1950).

Ora nel caso in cui sia applicabile una teoria perturbativa noi avremo in generale:

$$(8,2) \quad E_n(\lambda) = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots,$$

$$(8,2\text{-}bis) \quad \varphi_n(\lambda) = \varphi_n^{(0)} + \lambda \varphi_n^{(1)} + \dots,$$

in cui le grandezze $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}, \dots$ e le funzioni $\varphi_n^{(0)}, \varphi_n^{(1)}, \dots$ sono indipendenti da λ .

Si ponga ora:

$$(8,3) \quad \lambda(t') = \lambda(t)\chi(t'), \quad (t' < t)$$

dove $\chi(t')$ è una funzione crescente monotonicamente e uguale a zero per $t' = -\infty$ ed uguale ad uno per $t' = t$.

In tal caso si ha:

$$(8,4) \quad \int_{-\infty}^t E_n(\lambda) dt' = E_n^{(0)} \int_{-\infty}^t dt' + E_n^{(1)} \lambda \int_{-\infty}^t \chi(t') dt' + E_n^{(2)} \lambda^2 \int_{-\infty}^t \chi^2(t') dt' + \dots$$

Ora si noti che quando l'accrescimento di λ tende a divenire adiabatico, i coefficienti dello sviluppo (8,4) tengono in generale all'infinito, a meno che $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}, \dots$ non siano tutti nulli. Ne segue anche che in generale $\varphi_{n,n}^{(1)}(t)$ non potrà espandersi secondo una serie di potenze di λ nemmeno nel caso in cui valga la teoria delle perturbazioni: anzi a rigore non si potrà nemmeno considerare una funzione ben definita di λ a causa della presenza di una fase infinita formalmente funzione di λ . Una eccezione si avrà nel caso di un Hohrraum infinito, perché in tal caso (e se lo spettro degli autovalori dell'energia si ridurrà esclusivamente a uno spettro continuo) supponendo V finito (e $\int |V| d\Omega$ pure) i termini $E_n^{(1)} \dots$ saranno tutti nulli.

Il risultato ottenuto nel n. 7 appare perciò piuttosto ragionevole.

D'altra parte una conferma diretta del fatto che l'equazione (4,1) non è senz'altro valida nel caso in cui la teoria delle perturbazioni è applicabile, si può avere nella maniera seguente: si consideri infatti l'equazione:

$$(8,5) \quad \varphi_n = \exp \left[-i \frac{H_0}{\hbar} t \right] \underline{\varphi}_n = \exp \left[-i \frac{H_0}{\hbar} t \right] \Pi(\lambda) \underline{\varphi}_{0n},$$

la quale deve valere in base alle considerazioni del n. 3 (si confronti anche l'equazione (2,4)).

Sviluppando la funzione φ_n in serie delle funzioni ortogonali (formanti un insieme completo) $\underline{\varphi}_{0m}$ si può scrivere:

$$(8,5\text{-}bis) \quad \varphi_n = \exp \left[-i \frac{H_0}{\hbar} t \right] \sum_m \underline{\varphi}_{0m} \sum_k \Pi_{mk}(\lambda) \delta_{kn} = \sum_m \underline{\varphi}_{0m} \Pi_{m,n}(\lambda),$$

(per la (2,4) $\varphi_{0m} = \exp[-i(H_0/\hbar)t]\varphi_{0m}$), ossia

$$(8,5\text{-ter}) \quad \Pi_{m,n}(\lambda) = \int_{\Omega} \varphi_{0m}^* \varphi_{\lambda n} d\Omega = (\varphi_{0m} \cdot \varphi_{\lambda n}).$$

Pertanto se si suppone che valga la teoria delle perturbazioni gli elementi matrice $\Pi_{m,n}(\lambda)$ possono essere calcolati nel solito modo mediante la teoria delle perturbazioni:

$$(8,6) \quad \Pi_{m,n}(\lambda) = \delta_{m,n} + \lambda \Pi_{m,n}^{(1)} + \lambda^2 \Pi_{m,n}^{(2)} + \dots,$$

dove

$$(8,6\text{-bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{mn}^{(1)} = -\frac{V_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad m \neq n \\ \Pi_{n,m}^{(2)} = \frac{1}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \left[\sum_{k \neq m} \frac{V_{nk} V_{km}}{E_k^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{V_{nm} V_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} - V_{nm} \Pi_{nm}^{(1)} \right]. \end{array} \right.$$

Infatti se consideriamo le equazioni:

$$(H_0 + \lambda V) \varphi_{\lambda,n} = E_{\lambda,n} \varphi_{\lambda,n},$$

$$H_0 \varphi_{0m} = E_m^{(0)} \varphi_{0m},$$

moltiplicando la prima scalarmente per φ_{0m} , tenendo presente la seconda e ricordando che H_0 è hermitiano si ottiene:

$$(E_{\lambda,n} - E_m^{(0)})(\varphi_{0m} \cdot \varphi_{0n}) = \lambda(\varphi_{0m} \cdot V \varphi_{\lambda,n}),$$

dalla quale con i soliti procedimenti della teoria delle perturbazioni e ricordando la (8,5) e la (8,5-ter) è facile ricavare la (8,6-bis). Si noti che $\Pi_{nn}^{(1)}$ rimane indeterminato con questo procedimento; l'unica condizione da porsi (per la unitarietà di Π) è che $\Pi_{nn}^{(1)}$ deve essere immaginario puro.

Se ora valessse la (4,1) usando la (4,2) si dovrebbe ottenere:

$$(8,7) \quad \Pi = S(\lambda) = 1 + \lambda S^{(1)} + \lambda^2 S^{(2)} + \dots =$$

$$= 1 - i \int_{-\infty}^0 \lambda V(t_1) dt_1 - \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \lambda V(t_1) \lambda V(t_2) + \dots$$

Ora le integrazioni che compaiono nelle (8,7) si possono eseguire con gli stessi metodi usati nel n. 7 e si ottiene il seguente risultato:

$$(8,7\text{-bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{nm}^{(1)} = -\frac{V_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (n \neq m); \quad S_{nn}^{(1)} = -i \int_{-\infty}^0 \lambda dt_1, \\ S_{n,m}^{(2)} = \frac{1}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \left(\sum_{k \neq m} \frac{V_{nk} V_{km}}{E_k^{(0)} - E_m^{(0)}} - V_{nm} S_{nm}^{(1)} \right) \quad (n \neq m). \end{array} \right.$$

Confrontando la (8,6-bis) con la (8,7-bis) si scorge immediatamente che, per esempio, $\Pi_{nm}^{(2)}$ differisce da $S_{n,m}^{(2)}$ per il termine $-V_{nm}V_{nm}/(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2$ e quindi in generale la (4,1) non vale incondizionatamente.

In modo simile ed usando metodi che saranno pienamente sviluppati nella seconda parte di questo lavoro, è possibile verificare direttamente che la causa della difficoltà e le condizioni di validità della (4,1) sono quelle che abbiamo già segnalato all'inizio di questo numero.

9. - Applicazione delle considerazioni precedenti alla teoria dei campi. Covarianza relativistica.

Nel caso della teoria dei campi può essere conveniente, cercare di dare alle considerazioni precedenti una forma la quale metta in rilievo la covarianza relativistica della teoria, che nella forma che abbiamo adottato fin qui è completamente nascosta.

Allo scopo cominciamo con l'osservare che in ogni teoria di campo è definita una densità di lagrangiana L la quale è un invariante relativistico. Nel caso si abbiano due campi di interazione la densità di lagrangiana L si compone della somma di due termini $L_0 + \lambda L'$ entrambi invarianti relativistici: uno non è che la lagrangiana dei campi liberi (ossia senza interazione), l'altro ($\lambda L'$) è la lagrangiana relativa all'interazione.

Quando sia possibile un formalismo canonico, come ammetteremo, si può nel solito modo dedurre un tensore dell'energia e dell'impulso il quale nel caso di due campi in interazione sarà espresso dalla somma di due tensori: uno relativo ai campi liberi $T_{\mu\nu}^{(0)}$, l'altro relativo alla interazione $T'_{\mu\nu}$. Se poi L' non contiene le derivate delle variabili canoniche che rappresentano il campo (come per esempio accade nel caso del campo elettromagnetico in accoppiamento con un campo elettronico), il tensore dell'energia e dell'impulso relativo alla interazione è semplicemente dato da

$$(9,1) \quad T'_{\mu\nu} = -\lambda \mathcal{H}' \delta_{\mu\nu},$$

dove naturalmente $\mathcal{H}' = -L'$ è un invariante relativistico (18).

Noi in questo paragrafo ci limiteremo semplicemente a considerare casi in cui vale (9,1).

Introdotte le variabili spazio temporali $x_1, x_2, x_3 = r, x_4 = ct$, la Hamiltoniana del sistema è definita nel solito modo:

$$(9,2) \quad H = \int \mathcal{H}_0 dr + \int \lambda \mathcal{H}' dr,$$

dove \mathcal{H}_0 è la densità di Hamiltoniana nel caso senza interazione.

(18) Naturalmente in \mathcal{H}' sarà incluso formalmente un termine relativo alla rior-
malizzazione della massa; vedi, per esempio, Dyson I, paragrafo IV.

Naturalmente volendo fare una teoria in forma relativisticamente covariante, è necessario usare una rappresentazione di Heisenberg e non una rappresentazione di Schrödinger; poichè d'altra parte non possiamo usare una rappresentazione di Heisenberg per il nostro problema (che sarebbe equivalente ad averlo risolto) useremo una rappresentazione di Heisenberg per il problema senza interazione, ossia la così detta «rappresentazione d'interazione». Anzi abbiamo usato tale rappresentazione nei primi numeri di questo lavoro, appunto per potere facilmente trasferire i risultati ivi ottenuti alla teoria dei campi. Continueremo a indicare sottolineandole le grandezze dinamiche nella rappresentazione di interazione.

Ciò posto possiamo, detta σ una qualunque ipersuperficie spaziale, riportare senz'altro la definizione di DYSON (19) per l'operatore che abbiamo chiamato $\Pi(\sigma)$

$$(9,3) \quad \Pi(\sigma) = \lim \left(1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \lambda \underline{\mathcal{H}}' dx \right) \left(1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \lambda \underline{\mathcal{H}}' dx \right) \dots ,$$

$\sigma_0, \sigma_1, \dots$ essendo prese al limite infinitamente vicine l'una all'altra. Tale definizione, essendo $\underline{\mathcal{H}}'$ invariante è in forma relativisticamente covariante. Analogamente potremo scrivere:

$$(9,4) \quad S(\sigma) = 1 - \left(-\frac{i}{\hbar c} \right) \int_{-\infty}^{\sigma_0} \lambda \underline{\mathcal{H}}'(x_1) dx_1 - \left(-\frac{i}{\hbar c} \right)^2 \int_{-\infty}^{\sigma_0} dx_1 \int_{-\infty}^{\sigma_1} dx_2 \lambda \underline{\mathcal{H}}'(x_1) \lambda \underline{\mathcal{H}}'(x_2) + \dots$$

Volendo introdurre anche qui un artificio corrispondente a quello che abbiamo chiamato «accensione adiabatica della carica», dovremo introdurre una funzione positiva di x ($x = x_1, x_2, x_3, x_4$) $\lambda(x)$ la quale sia un invariante relativistico e goda della proprietà di tendere monotonicamente a zero andando verso l'infinito passato; anzi più in generale supporremo che $\lambda(x)$ si annulli in ogni punto che si trovi a distanza infinita sia spaziale che temporale dai punti che ci interessano. Ciò posto possiamo cercare di estendere le considerazioni dei numeri 3 e 4 al caso attuale.

Dovremo innanzi tutto cercare di scrivere l'analogia della (4,3) in modo covariante. Allo scopo consideriamo i quattro operatori:

$$(9,5) \quad P_{\nu}^{(0)} = -\frac{i}{c} \int_{\sigma} d\sigma_{\lambda} T_{\lambda\nu}^{(0)},$$

dove $T_{\lambda\nu}^{(0)}$ è il tensore dell'energia e dell'impulso dei campi liberi mentre $d\sigma_{\lambda}$ è il quadrirettore che definisce l'elemento di ipersuperficie spaziale $d\sigma$ in estensione e giacitura (ed è quindi un vettore temporale). Tali quattro operatori formano evidentemente un quadrirettore la cui quarta componente è identica

(19) Dyson I, paragrafo III.

alla solita espressione della Hamiltoniana dei campi liberi quando la σ si identifica con un iperpiano spaziale (più precisamente è $(i/c)H_0$).

Analogamente potremo considerare i quattro operatori:

$$(9,5-bis) \quad P_\nu = -\frac{i}{c} \int_{\sigma} d\sigma_\lambda T_{\lambda\nu},$$

che formano sotto le solite ipotesi il quadrivettore dell'energia e dell'impulso di tutto il sistema.

Ciò posto possiamo considerare al posto della (4,3) le seguenti quattro relazioni:

$$(9,6) \quad P_{T,\nu} = S^{-1} P_\nu S,$$

le quali sono evidentemente covarianti data l'invarianza di S , e definiscono pertanto un nuovo quadrivettore $P_{T,\nu}$.

È facile allora riscrivere in forma covariante a vista tutti i calcoli eseguiti nei numeri 5 e 6) giungendo alle stesse conclusioni.

C'è semplicemente da notare che le integrazioni rispetto alla variabile t vanno sostituite con integrazioni rispetto al quadrvolume invariante

$$(9,7) \quad (dx)^4 = (d\sigma_\lambda \cdot d\tau_\lambda),$$

dove $d\sigma_\lambda$ e $d\tau_\lambda$ sono vettori temporali e al posto della (5,3) dovremo considerare le quattro relazioni covarianti:

$$(9,8) \quad [\underline{\mathcal{H}'}, P_\nu^{(0)}]_- = -i\hbar \left(\frac{\partial(\lambda \underline{\mathcal{H}'})}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \cdot \underline{\mathcal{H}'} \right).$$

Ciò posto si possono facilmente definire anche in questo caso degli operatori $P_{T,0,\nu}^{a,a}$ e $P_{T,0,\nu}^{n,b}$ analoghi agli operatori definiti dalla (5,4-bis) e dalla (5,4-ter) e procedendo in modo completamente simile a quello tenuto nei numeri 5 e 6 si può giungere alla dimostrazione di una formula analoga alla (6,2). A questo scopo per far vedere che il contributo dei termini analoghi ai termini $A_{n,\varphi}^{(2)}$, $A_{n,\varphi}^{(3)}$ definiti dalla (6,4) va a zero, basta far uso del fatto che vale l'equazione:

$$(9,9) \quad [\underline{\mathcal{H}'}(x), \underline{\mathcal{H}'}(x')]_- = 0,$$

se x , x' sono due punti appartenenti a una stessa ipersuperficie spaziale, e ricordare che $\lambda(x)$ si annulla dovunque all'infinito.

Il risultato principale raggiunto nel n. 6, che cioè è essenziale tener conto in modo esplicito della accensione adiabatica della carica, e che in tal caso il calcolo di H_T è ricondotto al calcolo di integrali del tipo di Feynman-Dyson, è così confermato nel caso della teoria dei campi e messo come si conviene in una forma relativisticamente covariante.

A questo proposito desidero notare che questo risultato è stato raggiunto

introducendo una funzione invariante λ di x che deve godere della proprietà di annullarsi ovunque in punti molto lontani. Quindi si è dovuto generalizzare il concetto di accensione adiabatica della carica per mantenere la covarianza relativistica. Ciò del resto è ovvio perché il concetto di « valore della carica in un certo istante » non è certo relativisticamente invariante. Così non è relativisticamente invariante la corrispondenza adiabatica tra stati stazionari. Si potrebbe anche osservare che con l'introduzione della funzione $\lambda(x)$ si è in certo senso distrutta la omogeneità dello spazio-tempo e quindi, nonostante che si sia conservata formalmente la covarianza relativistica delle equazioni, si è frustrato ugualmente lo scopo di tale covarianza. Tuttavia si può osservare che al limite le variazioni di $\lambda(x)$ in qualunque direzione e per qualunque distanza finita debbono assumersi infinitesime. Pertanto $\lambda(x)$ sarà da considerarsi costantemente uguale ad 1 entro qualunque volume finito dello spazio-tempo che ci può interessare. Se quindi si fa l'ipotesi (che implicitamente bisogna fare per dare un senso a tutte le teorie di questo tipo), che avvenimenti estremamente lontani nello spazio e nel tempo non influenzino sensibilmente quello che sta accadendo qui ed ora, al limite saranno soddisfatte non solo le esigenze formali, ma, almeno per quanto concerne questo punto, anche quelle sostanziali della relatività.

10. — Estensione dei risultati del n. 9 al caso di interazioni contenenti derivate delle funzioni di campo.

Nel caso in cui la parte di lagrangiana relativa alla interazione contenga derivate delle funzioni di campo, l'operatore $\underline{\mathcal{H}}'(x)$ non è più un invariante relativistico, ed inoltre non obbedisce più alla equazione (9,9). In tal caso non si può più nemmeno scrivere la equazione di Tomonaga-Schwinger nel solito modo perché la detta equazione non sarebbe più nè relativisticamente covariante nè integrabile. Tuttavia tali difficoltà si possono superare mediante un artificio che è stato suggerito per la prima volta da KANESAWA e TOMONAGA (20). Si può infatti mostrare che in tutti i casi di interesse fisico esiste un operatore $\mathcal{H}(x, \sigma)$ che gode delle seguenti proprietà: *a*) si annulla quando σ si riduce ad un iperpiano spaziale; *b*) l'operatore $\mathcal{H}(x, \sigma) + \underline{\mathcal{H}}'(x)$ è relativisticamente invariante; *c*) l'equazione di Tomonaga generalizzata:

$$(10,1) \quad \left[i\hbar c \frac{\delta}{\delta \sigma_x} + \mathcal{H}(x, \sigma) + \underline{\mathcal{H}}'(x) \right] \Phi(\sigma) = 0,$$

risulta integrabile.

(20) J. KANESAWA e S. TOMONAGA: *Prog. Theoret. Phys.*, **3**, 1 (1948); vedi anche B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 375 (1950).

Data l'esistenza dell'operatore $\mathcal{A}(x, \sigma)$ di Kanesawa e Tomonaga, risulta facile generalizzare l'operatore $S(\sigma)$ di Dyson al caso in cui $\underline{\mathcal{H}}'(x)$ contenga derivate degli operatori di campo. Basta infatti sostituire in \underline{S} al posto di $\mathcal{H}'(x)$ l'operatore $\mathcal{A}(x, \sigma) - \underline{\mathcal{H}}'(x)$. Ciò posto è semplice estendere le conclusioni tratte nel n. 9 al caso generale che qui stiamo trattando. L'unica differenza consiste nel fatto che come si può rilevare dalla proprietà c) dell'operatore $\mathcal{A}(x, \sigma)$ al posto della (9,9) vale l'equazione:

$$(10,2) \quad \left[\underline{\mathcal{H}}'(x), \underline{\mathcal{H}}'(x') \right]_- = i\hbar \left\{ \frac{\delta \mathcal{A}(x')}{\delta \sigma_{x'}} - \frac{\delta \mathcal{A}(x)}{\delta \sigma_x} \right\}.$$

Ciò però, come si può facilmente verificare, non cambia per nulla le conclusioni finali, del n. 9, che si possono pertanto considerare estese a tutti i casi di interesse fisico sia pure con le limitazioni discusse nel n. 8.

APPENDICE

Vogliamo indicare per sommi capi quale è il procedimento per passare nel caso generale dalla formula (7,4) alla (7,5).

Si definiscano i simboli:

$$[1], \quad [n], \quad [1,2], \quad [1,n] \dots [1,2, \dots r, n-k, n-k+1, \dots n] \dots ,$$

mediante le seguenti relazioni ricorrenti:

$$[1] = \exp \{ (\alpha + iE_2 - iE_3)t_{n-1} \} \cdot [1,2] - \\ - \exp \{ (\alpha + iE_n - iE_{n+1})t_{n-1} \} [1,n]$$

$$[n] = \exp \{ (\alpha + iE_1 - iE_2)t_{n-1} \} \cdot [1,n] - \\ - \exp \{ (\alpha + iE_{n-1} - iE_n)t_{n-1} \} \cdot [n-1, n]$$

(A,1)

$$[1, 2, \dots r, n-k, \dots n] = \\ = \exp \{ (\alpha + iE_{r+1} - iE_{r+2})t_{n-r-k-1} \} \cdot [1, 2 \dots r, r+1, n-k, \dots n] - \\ - \exp \{ (\alpha + iE_{n-k-1} - iE_{n-k})t_{n-r-k-1} \} \times \\ \times [1, 2 \dots r, n-k-1, n-k, \dots n]$$

$$[1, 2, 3 \dots n-1, n] = 1,$$

dove $E_1 = E_{a_1}$, $E_2 = E_{a_2}$, ..., e $\hbar = 1$.

Allora si scorge facilmente che si ha:

$$(A,2) \quad \left[\left(\lambda \underline{V}(t_n) \mid \lambda \underline{V}(t_{n-1}) \dots \left[\lambda \underline{V}(t_2), \lambda \underline{V}(t_1) \right]_- \dots \right]_- \right]_{a_1 a_{n+1}} = \\ = \Sigma_{a_2 \dots a_n} V_{a_1, a_2} V_{a_2, a_3} \dots V_{a_n, a_{n+1}} \{ \exp \{ (\alpha + iE_1 - iE_2)t_n \} [1] - \\ - \exp \{ (\alpha + iE_n - iE_{n+1})t_n \} \cdot [n] \} .$$

Si può allora mostrare usando un procedimento di induzione completo che vale la formula

$$\begin{aligned}
 (A,3) \quad & \int_{-\infty}^{t_{n-k}} dt_{n-k+1} \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left(\left[\lambda V(t_n) \left[\dots \left[\lambda V(t_2), \lambda V(t_1) \right] \dots \right] \right] \right)_{a_1 a_{n+1}} = \\
 & = \frac{1}{\alpha + iE_1 - iE_2} \cdot \frac{1}{2\alpha + iE_1 - iE_3} \dots \frac{1}{k\alpha + iE_1 - iE_{n+1}} \times \\
 & \quad \times \exp [(k+1)\alpha + i(E_1 - E_{k+1-l} + E_{n-l} - E_{n+1})] [1, 2, 3 \dots k+1] + \dots + \\
 & - (-1)^{l+1} \frac{(k+1)\alpha + i(E_1 - E_{k+1-l} + E_{n-l} - E_{n+1})}{\{\alpha + iE_1 - iE_2\} \dots \{(k-l)\alpha + iE_1 - iE_{k+1-l}\} \cdot \{(l+1)\alpha + iE_{n-l} - iE_{n+1}\} \dots \{\alpha + iE_n - iE_{n+1}\}} \times \\
 & \quad \exp [\{(k+1)\alpha + i(E_1 - E_{k+1-l} + E_{n-l} - E_{n+1})\} t_{n-k}] [1, 2, \dots k-l, n-l, \dots n] + \dots
 \end{aligned}$$

Da questa formula si deduce facendo $k = n$, e ricordando le (A,1), la (7,4) e la (7,5) che:

$$\begin{aligned}
 (A,4) \quad & K_{a_1, a_{n+1}}^{(n)} = \sum_{a_2 \dots a_n} V_{a_1 a_2} V_{a_2 a_3} \dots V_{a_n a_{n+1}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{(\alpha + iE_1 - iE_2)(2\alpha + iE_1 - iE_3) \dots ((n-1)\alpha + iE_1 - iE_n)} \right. \\
 & \quad \left. \frac{1}{(\alpha + iE_1 - iE_2) \dots ((n-2\alpha) + iE_1 - iE_{n-1})(\alpha + iE_1 - iE_{n+1})} \right. \\
 & + (-1)^{n+1} \left. \frac{1}{((n-1)\alpha + iE_2 - iE_{n+1}) \dots (\alpha + iE_n - iE_{n+1})} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ci resta ora soltanto da dimostrare che $K_{a_1, a_{n+1}}^{(n)}$ resta finito purchè si assuma Ω infinito quando si fa tendere α a zero.

Allo scopo si consideri uno qualunque dei termini che compaiono in (A,4), per esempio:

$$\sum V_{a_1 a_2} \dots V_{a_n a_{n+1}} \cdot \frac{1}{(\alpha + iE_1 - iE_2) \dots ((n-1)\alpha + iE_1 - iE_n)}.$$

Per Ω infinito la sommatoria multipla si può cambiare in un integrale multiplo, ed in tale integrale $E_1 - E_2, E_1 - E_3, \dots, E_1 - E_n$ si possono assumere come variabili indipendenti.

Si hanno allora da considerare integrali del tipo:

$$\int f(x) \frac{dx}{\alpha + ix},$$

che, se non divergono per ragioni che non hanno nulla a che fare con α , rimangono finiti per α tendente a zero.

Analogamente si trattano gli altri termini con scelta opportuna delle varia-
bili indipendenti.

S U M M A R Y

Following Dyson, when the perturbation theory can be applied, the divergences of electrodynamics may be circumvented to any desired order of perturbation theory i.e. in the fine structure constant. However Dyson's treatment cannot be immediately extended to bound state phenomena, because in this case the perturbation theory is not sufficient. In the first part of this paper some preliminary questions related to the problem of extending Dyson's method to the calculation of the energy eigenvalues are considered. For this purpose a Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (H_0 + \lambda V)\varphi,$$

which in the « interaction representation » is of the form

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda V\varphi,$$

is discussed.

An operator

$$\Pi = \lim \Pi_i \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{i_i}^{t_{i+1}} \lambda V dt \right],$$

is defined. This operator is similar to the operator defined by the equation (10) of Dyson I (F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486 (1949)). It is then shown that this unitary operator transforms by a canonical transformation the total Hamiltonian $H_0 + \lambda V$ into an operator which is commutable with H_0 , provided that the « charge » λ is adiabatically switched on. It is further shown that this adiabatic switching on of the charge must be explicitly taken into account in the calculation of the transformed Hamiltonian operator, in order to get sensible results. Use is made in fact of the relation:

$$[\lambda V, H_0]_- = i\hbar \frac{d(\lambda V)}{dt} - i\hbar \frac{d\lambda}{dt} \cdot V,$$

and it is shown that from $i\hbar(d\lambda/dt) \cdot V$ there arises an essential contribution to the energy eigenvalues, even in the limit $d\lambda/dt \rightarrow 0$. Furthermore it is shown that Π cannot be in general expanded in powers of λ even when the perturbation theory is valid, if there are discrete eigenvalues of the energy. The reasons for this fact are discussed. A consequence of this result is that the equation (13) of Dyson I will be

no longer valid without restrictions, even in the case of the validity of the perturbation theory. It is then necessary to give a proof of the existence of the operator Π and this will be performed in the second part of this paper, together with the more general treatment for the bound state problems. At the end of the first part, relativistic invariance questions related to the present problems are discussed. For the purpose of achieving the relativistic invariance, a world-scalar function $\lambda(x)$ is introduced in place of the charge. $\lambda(x)$ is taken to be zero at infinity of the space-time in all directions but to be practically a constant in any finite region. This allows an invariant generalization of the switching on of the charge.

Sulla radioattività del potassio.

M. CECCARELLI, G. QUARENÌ e A. ROSTAGNI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio degli ioni veloci del C.N.R. - Padova

(ricevuto il 4 Dicembre 1950)

Riassunto. — Dopo una rassegna dei principali risultati oggi disponibili sulla radioattività del Potassio viene descritta una nuova esperienza per la determinazione del rapporto λ_K/λ_- fra le costanti di trasformazione per cattura K e per emissione β^- . I raggi β (primari) ed i raggi X (secondari alla cattura K) emessi da un sottile strato cilindrico di KF, vengono rivelati da un contatore di G. e M. coassiale collo strato. I raggi β si possono escludere dalla misura con un campo magnetico longitudinale, i raggi X con un assorbitore mobile in foglia d'Al. Dalle differenze osservate si deduce che $\lambda_K/\lambda_- \leq 0,1$.

1. — La radioattività del Potassio fu scoperta nel 1906, insieme con quella del Rubidio, da CAMPBELL e WOOD [¹], i quali constatarono che i sali di questi elementi emettono particelle β in quantità proporzionali al contenuto degli elementi stessi. La cosa suscitò un interesse notevole, in quanto si tratta praticamente dei soli elementi naturali che siano radioattivi all'infuori delle famiglie ben note che occupano l'estremo superiore del sistema periodico. All'interesse propriamente fisico, in rapporto colla sistematica dei nuclei, si aggiunge poi, per il potassio, l'interesse geofisico, data la diffusione di esso in natura.

Le ricerche si moltiplicarono nel corso degli anni, dirette a determinare sia l'energia delle particelle emesse, sia il numero per grammo di elemento e per secondo, sia infine l'isotopo responsabile dell'emissione. Le misure risultano particolarmente delicate per la piccolezza dell'attività specifica.

Nel 1928 KOLHÖRSTER [²] scoprì nel Potassio, accanto all'attività β , una ancor più debole attività γ . Questa non è stata riscontrata fino ad oggi nel Rubidio.

Scoperto nel 1935 l'isotopo 40 del Potassio da NIER [³], SMYTHE e HEM-

MENDINGER [4] stabilirono che a questo è dovuta la radioattività dell'elemento, in accordo con le previsioni teoriche di KLEMPERER [5] e di NEWMAN e WALKER [6] ed in contrasto con l'obbiezione di SITTE [7] che, se esiste un K^{40} ed emette particelle β^- , trasformandosi in Ca^{40} , esso dovrebbe pure potersi trasformare nell'altro isobaro stabile A^{40} con emissione β^+ , che non è stata osservata. Quest'ultima questione è ripresa nel 1937 da v. WEIZSÄCKER [8], tenendo conto dei calcoli di MÖLLER [9], dai quali risulta che là dove l'emissione β^+ è improbabile o energeticamente impossibile può avere probabilità finita la cattura di un elettrone del livello K da parte del nucleo, colo stesso prodotto finale.

Il WEIZSÄCKER rileva d'altronde come l'ipotesi della trasformazione del K^{40} in A^{40} per emissione β^+ o per cattura K , accanto a quella ammessa in Ca^{40} per emissione β^- , consentirebbe di spiegare una fondamentale anomalia geochimica: la presenza di Argon (precisamente di A^{40}) nell'atmosfera in una misura 1000 volte superiore a quella che si attenderebbe dal rapporto cogli altri gas nobili. Ammesso che questo gas derivi praticamente tutto da trasformazione del K^{40} contenuto nella crosta terrestre, e fissato arbitrariamente lo spessore interessato di questa in 16 km, il WEIZSÄCKER deduce un valore $\lambda_+/\lambda_- \cong 1/2$ per il rapporto fra le costanti di trasformazione in A e in Ca , valore che può tuttavia essere errato di un fattore 10 o più, data l'incertezza dei dati di partenza.

2. – Il lavoro di WEIZSÄCKER offre lo spunto a tutta una serie di verifiche sperimentali più o meno dirette:

- a) rivelazione dell'emissione β^+ ;
- b) rivelazione della cattura K , attraverso i raggi X o attraverso gli elettroni Auger che ne derivano;
- c) studio comparativo dell'emissione β^- e γ ;
- d) determinazione delle differenze di massa dei nuclei isobari interessati A^{40} , K^{40} , Ca^{40} ;
- e) determinazione del contenuto eventuale di A^{40} in minerali di potassio;
- f) determinazione del contenuto di Ca^{40} in minerali di potassio.

La verifica a) fu tentata dal BOTHE [10], il quale concluse che, se vengono emesse particelle β^+ , queste rappresentano meno dell'1% delle β^- . Osservazioni sperimentali più recenti, di carattere indiretto, porterebbero alla conclusione che tale percentuale è $< 2 \cdot 10^{-5}$ [11].

Esperienze del tipo b), fondate sulla ricerca di raggi X, furono compiute prima da THOMPSON e ROWLANDS [12] e poi da BLEULER e GABRIEL [13]. I primi, da osservazioni in camera di Wilson, conclusero che vi sarebbero da 3 a 4 catture K per ogni processo β^- , cioè $\lambda_K/\lambda_- = 3 \div 4$; gli altri, da misure con uno speciale contatore a filo, dedussero $\lambda_K/\lambda_- = 1,9 \pm 0,4$.

Ricerche del tipo c) furono compiute da numerosissimi autori, i quali cercarono di determinare l'energia massima o la forma dello spettro β^- , l'energia dei quanti γ , le vite medie dei rispettivi processi, ed infine le coincidenze even-

tuali fra questi. La conclusione prevalente fu che l'energia del quanto γ è maggiore dell'energia massima dello spettro β^- , e che perciò i due processi di emissione devono avere origine da due trasformazioni differenti: ciò che si accorderebbe coll'idea che accanto alla trasformazione $K \rightarrow Ca$ possa aver luogo una trasformazione $K \rightarrow A$. Le coincidenze β , γ furono investigate da MEYER, SCHWACHHEIM e SOUZA SANTOS [14] e poi con particolare cura da HAXEL, HEINTZE e HOUTERMANS [15] con risultato negativo: dalle misure di questi ultimi risulta che meno del 0,6% delle particelle β uscenti da uno strato di KCl di $10,6 \text{ mg/cm}^2$ coincidono con un quanto γ . In tab. I abbiamo riuniti i risultati delle determinazioni più recenti relative ai processi β e γ .

Determinazioni del tipo *d*), attraverso lo studio di reazioni nucleari opportune, furono tentate recentemente da RICHARDS e SMITH [32] e da SAILOR [33], ma con risultati troppo imprecisi per poterne trarre delle conclusioni.

Determinazioni del tipo *e*) furono compiute da HARTECK e SUESS [34], BORST e FLOYD [18], ALDRICH e NIER [35]. I primi non trovarono quantità apprezzabili di Argon in campioni di Silvina e di Carnallite di età nota e conclusero che dev'essere $\lambda_K/\lambda_- < 0,1$. BORST e FLOYD determinarono la quantità totale di gas liberata da un campione di Silvina; ammettendo, senza alcuna verifica diretta, che si trattasse di Argon, dedussero un valore di $\lambda_K/\lambda_- \cong 0,7$. ALDRICH e NIER non solo riuscirono, con un procedimento molto accurato, ad isolare l'A da alcuni minerali di K, ma anche a determinarvi, collo spettrografo di massa, il rapporto A^{40}/A^{36} , rapporto che risulta maggiore che nell'Argon atmosferico, in accordo con l'ipotesi di un'origine radioattiva dell'A⁴⁰. Dai valori trovati per questo rapporto, combinati con quelli assegnati dai diversi autori per λ_- , essi deducono dei valori di λ_K/λ_- tutti compresi fra 0,003 e 0,09. Per questo tipo di determinazioni rimane il dubbio che una frazione sensibile dell'A⁴⁰ di origine radioattiva possa essere sfuggita dal minerale nel corso della sua storia. Perciò i valori determinati possono avere il carattere di limiti inferiori.

Determinazioni del tipo *f*) furono compiute da AHRENS ed EVANS [30]. Essi partono dal concetto che la quantità di Calcio generata da una determinata quantità di K⁴⁰ in un minerale di quest'ultimo elemento è funzione non solo di λ_- ma anche di λ_K , in quanto λ_K interviene con λ a determinare la legge di decremento dell'A⁴⁰ originario. Da misure del contenuto complessivo di Ca in lepidoliti molto antiche, di età ben determinata, essi deducono come valore più probabile di $\lambda_K/\lambda_- \sim 1,4$. La loro deduzione è però subordinata ad ipotesi affatto arbitrarie circa la frazione da ritenersi radiogenica e quella da ritenersi originaria, del Ca presente in codesti minerali potassici. La sola via attendibile per giungere ad un risultato in questa direzione sarebbe fornita da una determinazione del rapporto isotopico Ca^{40}/Ca^{44} . Un primo tentativo in questo senso compiuto da NIER [36] mostra che la frazione considerata come radiogenica da AHRENS ed EVANS è esagerata per un fattore 5 almeno.

TABELLA I.

	METODO	AUTORI
E_{β}^{\max} (10^6 eV)		
1,27 \pm 0,10	Spettrometro magnetico	CECCARELLI, MERLIN e RO- STAGNI [16]
1,7 \pm 0,1	Cam. Wilson in c. magnet.	FRANCHETTI e GIOVAN- NOZZI [17]
1,9 \pm 0,2	Assorbim. (contat. G.M.)	BORST e FLOYD [18]
1,41 \pm 0,02	»	HIRZEL e WÄFFLER [19]
1,45 \pm 0,15	»	FLOYD e BORST [20]
1,40 \pm 0,03	Spettrometro magnetico	ALBURGER [21]
1,36 \pm 0,05	Scintillaz. confotomoltip.	BELL, WEAVER e CAS- SIDY [22]
1,36 \pm 0,03	Spettrometro magnetico	ALBURGER [23]
E_{γ} (10^6 eV)		
1,45 \pm 0,15	Spettrometro magnetico	CECCARELLI, MERLIN e RO- STAGNI [16]
1,54 \pm 0,10	Assorbim. (contat. G.M.)	HIRZEL e WÄFFLER [19]
1,46 \pm 0,04	Scintillaz. con fotomoltip.	BELL e CASSIDY [24]
1,47 \pm 0,03	» » »	PRINGLE, STANDIL e ROUL- STON [25]
1,46 \pm 0,01	» » »	BELL e CASSIDY [21]
λ_{β} (10^{-10} a $^{-1}$)		
5,9	Contatore G.M.	SPIERS [26]
5,2 \pm 0,3	» »	HAXEL, HEINTZE e HOU- TERMANS [15]
5,1 \pm 0,2	» »	GRAF [27]
3,9 \pm 0,4	» »	BORST e FLOYD [18]
6,25 \pm 1,1	» »	HIRZEL e WÄFFLER [19]
4,3 \pm 0,4	» »	FLOYD e BORST [20]
6,0 \pm 0,6	» »	FAUST [28]
5,5 \pm 0,2	» »	SAWYER e WIEDENBECK [29]
λ_{γ} (10^{-10} a $^{-1}$)		
0,58	Camera ionizzazione	SPIERS [26]
0,58 \pm 0,6	Contatore G.M.	HAXEL, HEINTZE e HOU- TERMANS [15]
0,62 \pm 0,02	» »	AHRENS e EVANS [30]
0,21 \pm 0,05	» »	FLOYD e BORST [20]
0,69 \pm 0,06	Scintillaz. con fotomoltip.	SAWYER e WIEDENBECK [31]
0,69 \pm 0,08	Contatore G.M.	FAUST [28]

I numeri fra parentesi quadre si riferiscono alle note bibliografiche.

3. — Fra le esperienze ricordate, quella che sembrava recare il più solido appoggio all'ipotesi della trasformazione del K^{40} in A^{40} per cattura K , e che riscuoteva il maggior credito, era quella di BLEULER e GABRIEL [13]. Nel contrasto fra il risultato della determinazione sperimentale diretta di una costante fisica e quello di deduzioni indirette di essa da osservazioni geochimiche ci è sembrato che mettesse conto di tentare una nuova determinazione diretta, in migliorate condizioni sperimentali.

Nella disposizione di BLEULER e GABRIEL la rivelazione dei raggi X , che si attendono come conseguenza della cattura K (raggi X della serie K dell'A), è affidata ad un contatore a filo a parete molto sottile, posto sull'asse di uno strato cilindrico di KF. Agli impulsi dovuti ai raggi X si sovrappongono naturalmente quelli dovuti ai raggi β dello strato stesso e quelli dovuti ai raggi cosmici. La separazione avviene per assorbimento, in quanto i raggi X in questione, con $h\nu \approx 3000$ V, sono molto meno penetranti dei raggi β stessi del Potassio, di energia $\sim 10^6$ eV. Ma la determinazione riesce molto delicata per la piccolezza dell'effetto cercato, che risulta dell'ordine dell'1% rispetto al fondo di impulsi dei raggi β e dei raggi cosmici. Occorre tener presente che una frazione soltanto (dell'ordine del 10%) dei processi di cattura dà origine a raggi X , mentre gli altri danno origine ad elettroni Auger, che nella disposizione di BLEULER e GABRIEL non vengono rivelati. Ed una frazione notevole dei raggi X viene assorbita nello strato stesso di KF e nella parete del contatore; mentre è poi una frazione del residuo che viene rivelata, in quanto il rendimento del contatore non raggiunge il 40%.

Un perfezionamento essenziale del dispositivo di BLEULER e GABRIEL è stato da noi realizzato coi due artifici seguenti:

1) eliminazione del fondo di raggi β con un campo magnetico parallelo all'asse del sistema di misura, sufficiente a deviare i raggi fuori dal contatore;

2) riduzione del fondo di raggi cosmici (che uno schermo opportuno riduce alla sola componente penetrante) con un sistema di contatori in anticoincidenza.

4. — La nostra disposizione è raffigurata in fig. 1, in sezione longitudinale e trasversale. A e B rappresentano l'anodo e il catodo di un contatore di Geiger e Müller, di 58 mm di diametro e 140 mm di lunghezza utile. Il catodo B è fatto di un sistema di fili paralleli d'ottone di 0,3 mm, a 4 mm di distanza l'uno dall'altro. L'anodo A si trova sull'asse di un tubo D di 95 mm di diametro interno e 500 di lunghezza. Su un tratto di 140 mm di lunghezza della parete interna di D , nella parte mediana (in corrispondenza del contatore) è deposto per spruzzamento uno strato di 2,5 mg/cm² di KF. Lo scheletro mobile E , lungo 280 mm, è coperto per metà (140 mm) con foglia d'alluminio di 0,03 mm, per l'altra metà con una rete di fili di 0,1 mm: esso può essere fatto scorrere a volontà, inclinando il tubo D , verso un estremo o verso l'altro di questo, in

modo da interporre fra lo strato di KF ed il contatore la foglia d'Al oppure la rete.

Sia l'anodo che il catodo del contatore sono isolati elettricamente; il catodo *B* viene mantenuto ad un potenziale negativo di circa 300 V rispetto al tubo *D*. Ciò è necessario per circoscrivere lo spazio utile del contatore al solo spazio interno a *B*, impedendo l'entrata di elettroni liberati all'esterno [37]. Lo schermo mobile di Al è destinato ad assorbire completamente i raggi X, senza inde-

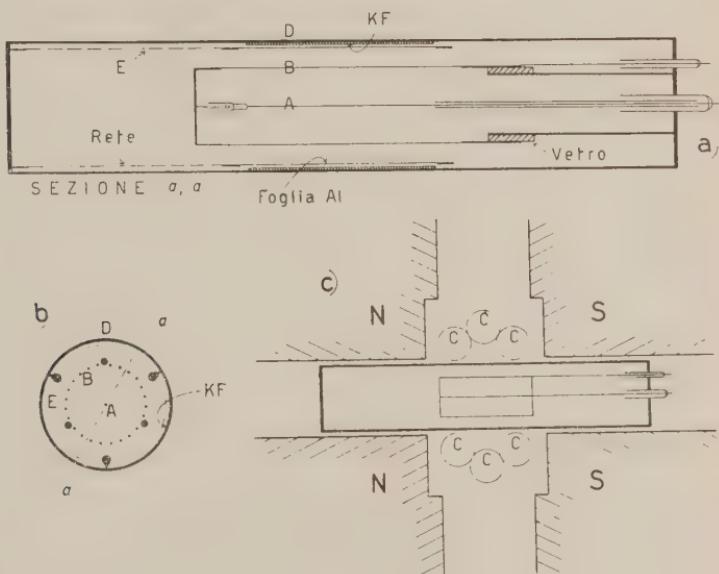


Fig. 1.

bolire i raggi β . La sostituzione dello schermo colla rete, ottenuta facendo scorrere *E*, libera la via ai raggi X, senza che si alteri il campo elettrico fra *B* e *D*.

Il contatore viene posto fra le espansioni polari *NS* di un elettromagnete (fig. 1, *C*), munite di un foro assiale di 100 mm di diametro, nel quale entra il tubo *D*. Il campo magnetico, parallelo all'asse del contatore, è abbastanza uniforme nella regione che interessa, viene regolato in modo da impedire l'accesso dei raggi β al contatore stesso. Si nota infatti che la frequenza degli impulsi decresce al crescere del campo sino a 7500 gauss, e poi rimane sensibilmente costante (fig. 2). In pratica il campo veniva da noi mantenuto sui 10000 gauss, sufficienti, secondo i calcoli, ad impedire che i raggi β dello strato di KF si avvicinassero a meno di 5 mm dal catodo *B* del contatore. Gli impulsi residui sono dovuti allora a particelle di maggiore energia o a radiazioni prive di carica: raggi cosmici, raggi γ e raggi X.

I 6 contatori C , in parallelo fra loro, sono collegati in un circuito di coincidenza col contatore principale. Le coincidenze registrate vengono sottratte al totale degli impulsi generati in AB , in quanto derivano (fatta astrazione dalle casuali) da corpuscoli energici provenienti dall'esterno.

La miscela di gas di riempimento che si rivelò più conveniente fu quella di 400 torr di Argon con 10 torr di Alcool etilico. Il rendimento del contatore AB con questa miscela per i raggi X dell'Argon, calcolato in base al coefficiente d'assorbimento, risulta di 0,48. Tenendo conto dell'assorbimento medio dei raggi nello strato di KF (0,50) e nello strato di gas interposto fra D e B (0,21) il rendimento effettivo risulta di 0,19.

Poichè quello che ci interessa in linea immediata è il rapporto fra le intensità dei raggi X e dei raggi β , e non il valore assoluto di queste, non dobbiamo preoccuparci dell'angolo solido sotto il quale è visto il contatore, chè questo sarà il medesimo per i raggi X e per i raggi β . Dobbiamo però tenere conto di un fatto importante, che è stato trascurato da BLEULER e GABRIEL, e sul quale GRÀF ha richiamato l'attenzione [27]: la diffusione delle particelle β nello strato di KF e nella parete di D , che dà luogo ad un notevole aumento del numero di queste che investe il contatore. Sia il calcolo diretto (in base ai valori oggi ammessi per l'attività β) di queste sia il confronto coi dati di GRÀF, mostrano che l'intensità apparente della radiazione β nel nostro contatore dev'essere ridotta per un fattore 0,5 circa.

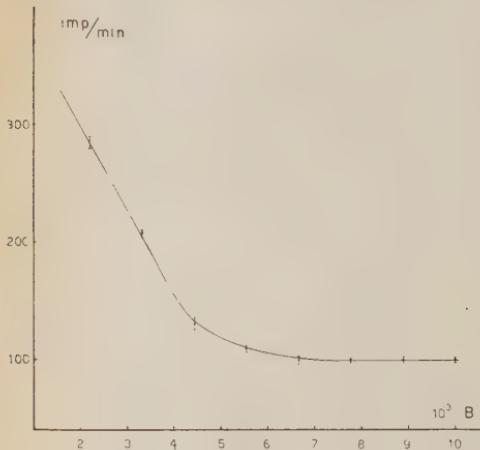


Fig. 2.

5. — I dati di misura sono riuniti nella tab. II. Nella 1^a linea è indicato il numero d'impulsi per minuto ottenuto senza campo magnetico. La differenza fra questo e il numero corrispondente della 2^a linea (o della 3^a), riportata nell'ultima colonna, rappresenta l'intensità dei raggi β . Ciò è stato confermato da esperienze effettuate allontanando il preparato di KF . Assumiamo dunque $I_\beta = 297$. A questo valore dev'essere applicato il fattore di correzione 0,5 per tener conto dell'effetto della diffusione, come si è detto di sopra.

La differenza fra i numeri d'impulsi nella 2^a e 3^a linea, riportata nell'ultima colonna, dovrebbe rappresentare l'effetto dei raggi X , in quanto lo schermo li assorbe completamente, senza influire sensibilmente su I_β . I numeri della

4^a e 5^a linea corrispondono a quelli della 2^a e 3^a, sottratte le coincidenze rispettive coi contatori *C*: la loro differenza deve corrispondere di nuovo all'intensità I_X , con una minore incertezza statistica. S'intende che a questi valori di I_X dev'essere applicato il fattore di correzione corrispondente al rendimento effettivo del contatore, che abbiamo calcolato in 0,19.

TABELLA II.

		Impulsi/minuto	Differenze
Senza campo	393	$I_\beta = 297$
Con campo	senza schermo	$96,19 \pm 0,16$	$I_X = 0,07 \pm 0,23$
	con schermo	$96,12 \pm 0,16$	
	senza schermo	$34,16 \pm 0,06$	$I_X = 0,15 \pm 0,08$
	con schermo	$34,01 \pm 0,06$	

Consideriamo infine il fatto che una frazione soltanto dei processi di cattura si risolve in emissione di raggi X: il 12% nel caso in questione [38]. Il rapporto fra le probabilità di transizione per cattura *K* o per emissione β risulta così

$$\frac{\lambda_K}{\lambda} = \frac{I_X}{I_\beta} \frac{1}{0,5 \cdot 0,19 \cdot 0,12} = 0,044 \pm 0,024.$$

Non ci fu possibile, per ragioni contingenti, prolungare ulteriormente le misure, in modo da ridurre l'errore statistico e poter assegnare un valore meglio determinato per il rapporto in questione. Al momento nel quale venivano eseguite queste esperienze il valore generalmente ritenuto più attendibile era quello di BLEULER e GABRIEL, e l'enorme divario da questo ci induceva piuttosto a prove dirette ad escludere ogni possibile causa di errore sistematico nel nostro procedimento, che non alla ricerca di una maggior precisione statistica.

6. — Fra le numerose esperienze di controllo eseguite ricordiamo quelle con miscele di riempimento diverse da quella indicata, in particolare colla miscela indicata da BLEULER e GABRIEL, di 20 torr di A, 10 di CCl_4 , 6 di etere di petrolio. Questa miscela, alla bassa pressione che ne risulta, darebbe al contatore lo stesso rendimento della nostra con 400 torr di A per raggi X dell'A, grazie all'assorbimento selettivo di questi negli atomi Cl. Partendo da questa e da analoghe considerazioni, altre miscele furono pure da noi sperimentate, con gas contenenti Cl oppure S: per esempio CH_3CH_2Cl e CS_2 .

Per tutte queste miscele si riscontrarono le seguenti anomalie di funzionamento:

- 1) forte pendenza del pianerottolo;
- 2) ritardo dell'ordine di 10^{-4} s negli impulsi.

La seconda anomalia fu messa in evidenza dalle misure di rendimento col l'artificio abituale, della determinazione del rapporto t/d fra le coincidenze triple e doppie in un telescopio di contatori, dei quali due di confronto (a miscela di Trost) e il terzo in esame. Con un potere risolutivo $r = 10^{-5}$ s nel circuito di coincidenze triple si ottengono i valori indicati nella 2^a colonna della tab. III, mentre si ottengono quelli della 3^a colonna portando il potere risolutivo a 10^{-4} s.

TABELLA III.

Miscela	t/d ($r = 10^{-5}$ s)	t/d ($r = 10^{-4}$ s)
I	0,98	0,98
II	0,02	0,64
III	0,05	0,87

miscela I: 90 torr A, 12 torr C_2H_5OH
 » II: 20 » A, 10 » CCl_4 ; 6 torr etere di petrolio
 » III: 20 » A, 20 » CS_2 , 6 » » »

Se la pendenza del pianerottolo si poteva annullare ricorrendo ad un circuito di spegnimento, il ritardo negli impulsi impediva praticamente l'uso delle anti-coincidenze per eliminare dalla misura il fondo di raggi cosmici. Diamo in tab. IV il risultato delle misure dirette a mettere in evidenza la cattura K colla miscela di Bleuler e Gabriel.

TABELLA IV (con campo magnetico).

	imp./min.	diff.
senza schermo . . .	$76,0 \pm 0,4$	$I_X = 0,1 \pm 0,6$
con schermo . . .	$75,9 \pm 0,4$	

Essendo I_β la medesima che nelle altre esperienze risulta

$$\frac{\lambda_K}{\lambda_-} = 0,03 \pm 0,18,$$

in accordo col risultato sopra assegnato, pur colla maggiore incertezza statistica.

7. - Quando le nostre esperienze erano ultimate e ne avevamo preannunciata la comunicazione al Congresso di Bologna della Società italiana di fisica (settembre 1950), ci pervenne il lavoro di SAWYER e WIEDENBECK [29] sullo stesso argomento. Questi autori ricorrono, per lo studio della cattura K , ad un preparato arricchito in K^{40} dalla proporzione naturale di 0,011% al 0,40%; e basano la misura sulla rivelazione degli elettroni Auger. Ottengono così

$$\frac{\lambda_K}{\lambda_-} = 0,13 \pm 0,04.$$

Il limite assegnato per l'errore è puramente indicativo, a giudizio degli autori stessi, in quanto è difficile valutare, al di fuori degli errori statistici, possibili cause d'errore sistematico, dato il metodo piuttosto indiretto da essi usato per il computo degli elettroni Auger.

In un lavoro posteriore di GRÀF [39], fondato sulla misura della differenza dei numeri d'impulsi prodotti da uno strato di KF in un contatore riempito rispettivamente con A e con Kr (i quali dovrebbero avere diverso rendimento per i raggi X dell' A), si assegna come limite superiore per il rapporto $\lambda_K/\lambda_- \cong 0,7$. Altre misure non ancora pubblicate, di HAXEL, HEINTZE e HOUTERMANS e di SMITS e GENTNER [16] hanno portato rispettivamente alla conclusione che $\lambda_K/\lambda_- < 0,3$ e che $\lambda_K/\lambda_- \cong 0,07$.

Si può dunque ritenere definitivamente accertato che il valore di Bleuler e Gabriel è sbagliato almeno per un fattore 10. Il valore che oggi sembra più probabile per il rapporto in questione, in base al confronto fra le misure di SAWYER e WIEDENBECK, di ALDRICH e NIER e le nostre, che sembrano le più accurate, è

$$\frac{\lambda_K}{\lambda_-} \cong 0,1.$$

Questo valore si accorderebbe anche coll'ipotesi avanzata da SUÈSS, che il numero delle catture K sia eguale a quello dei processi d'emissione γ , in quanto ogni cattura lasci il nucleo di A^{40} in uno stato eccitato [40]. Le misure più recenti danno infatti

$$\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_-} \cong 0,1.$$

Noi riteniamo che la determinazione più precisa del rapporto λ_K/λ_- potrebbe essere compiuta col nostro metodo, che è più diretto di quello di SAWYER e WIEDENBECK, quando si potesse disporre di un preparato di KF arricchito in K^{40} per un fattore 10 o più.

8. — Riassumendo, i valori che oggi si possono ritenere più probabili per le costanti radioattive del K^{40} sono i seguenti:

$$\begin{aligned}\lambda_- &= (5,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1} \\ \lambda_\gamma &= (0,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1} \\ \lambda_K &= 0,6 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}.\end{aligned}$$

Per le energie corrispondenti si può assumere

$$\begin{aligned}E_\beta &= (1,36 \pm 0,04) \cdot 10^6 \text{ eV} \\ E_\gamma &= (1,46 \pm 0,04) \cdot 10^6 \text{ eV}.\end{aligned}$$

La conoscenza di questi dati si può ormai ritenere abbastanza definita e sicura per le applicazioni geofisiche e geologiche, alle quali molta attenzione si è rivolta negli ultimi anni [41] soprattutto dopo la pubblicazione di BLEULER e GABRIEL, e l'allarme suscitato in seguito ad essa da GLEDITSCH e GRÄF [42].

Determinazioni più precise sarebbero invece ancora desiderabili agli effetti delle teorie nucleari, per le quali il caso del K^{40} si presenta particolarmente interessante, data la vicinanza di questo elemento col Ca^{40} , uno degli elementi a numeri « magici » di protoni e di neutroni ($Z = N = 20$).

Per una determinazione precisa di $E_{\beta_{\max}}$ non solo, ma dell'intero spettro β , appaiono assai promettenti le applicazioni dello spettrografo a lente magnetica con preparato arricchito in K^{40} [23], e quelle del metodo delle scintillazioni [22]. Per la determinazione di E_γ , i migliori risultati sembra che siano oggi quelli forniti dal metodo delle scintillazioni [11] [25], ma non è escluso che buone misure possano essere eseguite con un adatto spettrografo magnetico [16].

Dobbiamo ringraziare vivamente la Società Elettrica del Veneto Centrale per le facilitazioni accordateci nella fornitura della corrente per l'elettromagnete.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. R. CAMPBELL e A. WOOD: *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **14**, 15 (1906).
- [2] W. KOLHÖRSTER: *Naturwiss.*, **16**, 28 (1928).
- [3] A. O. NIER: *Phys. Rev.*, **48**, 283 (1935).
- [4] W. R. SMYTHE e A. HEMMENDINGER: *Phys. Rev.*, **51**, 178 (1937).
- [5] O. KLEMPERER: *Proc. Roy. Soc.*, **148 A**, 638 (1935).
- [6] F. H. NEWMAN e H. J. WALKE: *Phil. Mag.*, **19**, 767 (1935).
- [7] K. SITTE: *Zeits. f. Phys.*, **96**, 593 (1935).
- [8] C. F. v. WEIZSÄCKER: *Phys. Zeits.*, **38**, 623 (1937).
- [9] C. MØLLER: *Phys. Rev.*, **51**, 84 (1937).
- [10] W. BOTHE e A. FLAMMERSFIELD: *Naturwiss.*, **29**, 194 (1941), nota a pie' di pagina.
- [11] P. R. BELL e J. M. CASSIDY: *Phys. Rev.*, **79**, 173 (1950).
- [12] F. C. THOMPSON e S. ROWLANDS: *Nature*, **152**, 103 (1943).
- [13] E. BLEULER e M. GABRIEL: *H.P.A.*, **20**, 67 (1947).

- [14] H. A. MEYER, G. SCHWACHHEIM e M. D. SOUZA SANTOS: *An. Ac. Bras.*, **19**, 189 (1947).
- [15] O. HAXEL, J. HEINTZE e F. G. HOUTERMANS: comunicazione privata di F. G. HOUTERMANS.
- [16] M. CECCARELLI, M. MERLIN e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **6**, 151 (1949).
- [17] S. FRANCHETTI e M. GIOVANNOZZI: *Phys. Rev.*, **74**, 102 (1948).
- [18] L. B. BORST e J. J. FLOYD: *Phys. Rev.*, **74**, 989 (1948).
- [19] O. HIRZEL e H. WÄFFLER: *Phys. Rev.*, **74**, 1553 (1948).
- [20] J. J. FLOYD e L. B. BORST: *Phys. Rev.*, **75**, 1106 (1949).
- [21] D. E. ALBURGER: *Phys. Rev.*, **75**, 1442 (1949).
- [22] P. R. BELL, B. WEAVER e J. M. CASSIDY: *Phys. Rev.*, **77**, 399 (1950).
- [23] D. E. ALBURGER: *Phys. Rev.*, **78**, 629 (1950).
- [24] P. R. BELL e J. M. CASSIDY: *Phys. Rev.*, **77**, 409 (1950).
- [25] R. W. PRINGLE, S. STANDIL e K. I. ROULSTON: *Phys. Rev.*, **77**, 841 (1950).
- [26] F. W. SPIERS: *Nature*, **165**, 356 (1950).
- [27] T. GRÄF: *Phys. Rev.*, **74**, 831 (1948).
- [28] W. R. FAUST: *Phys. Rev.*, **78**, 626 (1950).
- [29] G. A. SAWYER e M. L. WIEDENBECK: *Phys. Rev.*, **79**, 490 (1950).
- [30] H. L. AHRENS e R. D. EVANS: *Phys. Rev.*, **74**, 279 (1948).
- [31] G. A. SAWYER e M. L. WIEDENBECK: *Phys. Rev.*, **76**, 1535 (1949).
- [32] H. T. RICHARDS e R. V. SMITH: *Phys. Rev.*, **74**, 1870 (1948).
- [33] V. L. SAILOR: *Phys. Rev.*, **75**, 1836 (1949).
- [34] P. HARTECK e H. E. SUESS: *Naturwiss.*, **74**, 214 (1946).
- [35] L. T. ALDRICH e A. O. NIER: *Phys. Rev.*, **74**, 876 (1948).
- [36] V. nota in fine del lavoro di H. JEFFREYS: *Ann. de Géophys.*, **6**, 10 (1950).
- [37] A questo proposito v. W. F. LIBBY e D. D. LEE: *Phys. Rev.*, **55**, 245 (1939).
- [38] A. H. COMPTON e S. K. ALLISON: *X-Rays in theory and experiment* (New York, 1935), p. 488.
- [39] T. GRÄF: *Phys. Rev.*, **79**, 1014 (1950).
- [40] H. E. SUESS: *Phys. Rev.*, **73**, 1209 (1948).
- [41] V. per es. H. JEFFREYS: *Ann. de Géophys.*, **6**, 10 (1950); A. ROSTAGNI: *Geofisica pura e applicata*, **18**, 128 (1950).
- [42] E. GLEDITSCH e T. GRÄF: *Phys. Rev.*, **72**, 641 (1947).

SUMMARY

Recent work on the radioactivity of K^{40} is discussed. Then a new experimental determination of the ratio λ_K/λ_- between the decay constants through K -capture and β -emission is described. The β^- and X-rays (the latter resulting from the K -capture) emitted by a thin cylindrical layer of KF are counted in a coaxial G.M. counter. β^- and X-rays can be prevented from reaching the counter by the insertion of a magnetic field, respectively of an aluminium foil absorber, in the space between the counter and the KF layer. From the observed difference we deduce $\lambda_K/\lambda_- \leq 0.1$.

